R10) - 1. Fie primele 10 cifre ale nr.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$

Știm că ele toate sunt diferite.

Luăm a 11-a cifră. Din primul set au rămas toate în afară de $a_1$, iar în setul $a_2, \dots, a_{11}$ toate sunt cifre diferite $\Rightarrow a_1 = a_{11}$. Analog $a_2 = a_{12}, \dots$

Deci, prin inducție $\Rightarrow \begin{cases} a_{10k+r} = a_r, & 0 \le r < 10 \\ a_{10k} = a_{10} \end{cases}$

Fie că avem $t$ secvențe de 10 cifre în numărul nostru.

$$N = \overline{\underbrace{a_1 \dots a_{10}}_{1} \; \underbrace{a_1 \dots a_{10}}_{2} \dots \underbrace{a_1 \dots a_{10}}_{t} \; \underbrace{a_1 a_2 \dots}_{t+1}}$$

Deci, în a $(t+1)$-a secvență avem mai puțin de 10 cifre.

$$\left.\begin{cases} t \cdot (0+1+\dots+9) = t \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 45t \\ 2017 = 45 \cdot 44 + 37 \end{cases}\right\} \Rightarrow t = 44$$

$\Downarrow$

suma cifrelor din ultima secvență este 37.

Cu cât nr. de cifre din ultima secvență este mai mare, cu atât $N$ este mai mare (și invers).

$37 = 9+8+7+6+5+2 = 9+8+7+6+4+3$ — 6 cifre

$37 = 1+2+3+4+5+6+7+9$ — 8 cifre

$\begin{cases} \max(N) \text{ se începe cu } 9765432180 \\ \min(N) \text{ se începe cu } 2567890134 \end{cases}$

R10-2. $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$25^{x^4-y^2}+25^{y^4-x^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases}25^{x^4-y^2}>0\\ 25^{y^4-x^2}>0\end{cases} \Rightarrow 25^{x^4-y^2}+25^{y^4-x^2}\geq$$

$$\geq 2\sqrt{25^{x^4-y^2+y^4-x^2}}=2\cdot 5^{(x^4-x^2)+(y^4-y^2)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\cancel{2}\cdot 5^{-1/2}\geq \cancel{2}\cdot 5^{x^4-x^2+y^4-y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\geq x^4-x^2+y^4-y^2=\left(x^4-x^2+\frac{1}{4}\right)+\left(y^4-y^2+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\geq\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\geq-\frac{1}{2}$$

Deci, avem cazul de egalitate $\Big\}\Rightarrow$

$$\begin{cases}x^2=\frac{1}{2}\\ y^2=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

R10) - 3. Vom da următorul exemplu:

$(12, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 2, 1)$ - ~~1~~9 pungi

$$12+11+10+8+7+5+4+2+1=\frac{13\cdot 12}{2}-9-6-3=$$

$$=78-18=60 \qquad \frac{60}{2}=30,\ \frac{60}{3}=20,\ \frac{60}{4}=15,\ \frac{60}{5}=12$$

$$12=12=11+1=10+2=8+4=7+5$$

$$15=12+2+1=11+4=10+5=8+7$$

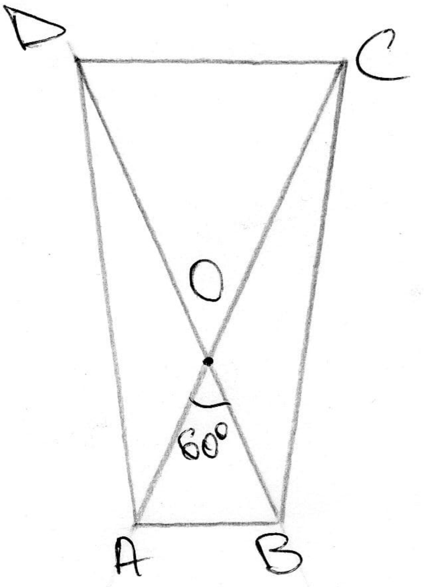
$$20=12+8=11+5+4=10+7+2+1$$

$$30=12+11+4+2+1=10+8+7+5$$

Numărul de pungi trebuie să fie mai mare decât $\frac{60}{12}=5$

R10)-5.

I)




Fie $CD > AB$

Din teorema cosinusului $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD^2 = AO^2 + DO^2 + 2\cdot AO\cdot DO\cdot \cos 60°$

$AD^2 = AO^2 + DO^2 + AO\cdot DO$

Analog $BC^2 = BO^2 + CO^2 + BO\cdot CO$

$CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2\cdot CO\cdot DO\cdot \cos 60°$

$CD^2 = CO^2 + DO^2 - CO\cdot DO$

Presupunem că

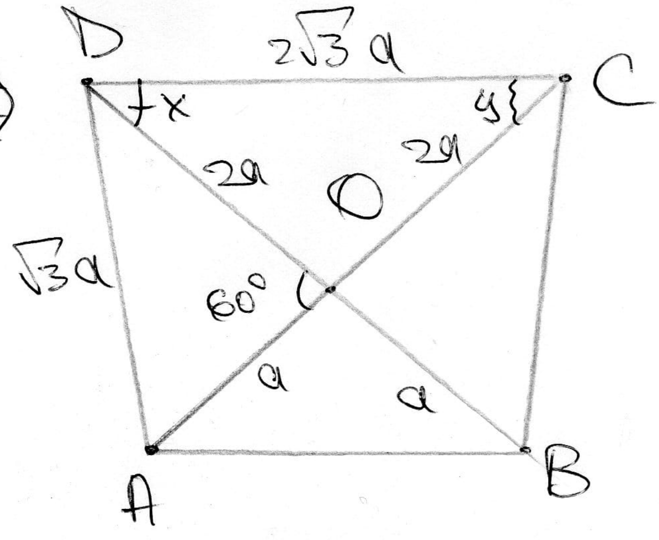
$$AD + BC \le CD \Leftrightarrow \underbrace{(AD+BC)^2}_{AD^2 + BC^2 + 2AD\cdot BC} \le CD^2$$

$$AO^2 + \cancel{DO^2} + AO\cdot DO + BO^2 + \cancel{CO^2} + BO\cdot CO + 2AD\cdot BC \le \cancel{CO^2} + \cancel{DO^2} - CO\cdot DO$$

$$AO^2 + AO\cdot DO + BO^2 + BO\cdot CO + CO\cdot DO + 2AD\cdot BC \le 0$$

contradicție

II)




$AD + BC \ge CD$

„=" $\Leftrightarrow \angle DAC = \angle DBC = 90°$

Dacă $AO = BO = a \Rightarrow$

$\Rightarrow DO = CO = 2a$

$AD = BC = \sqrt{3}a$

$CD^2 = 4a^2 + 4a^2 + \cancel{2}\cdot 2a\cdot 2a\cdot \cos \cancel{60°} = 12a^2 \Rightarrow CD = 2\sqrt{3}a$

Fie $\angle BDC = x$ și $\angle ACD = y \Rightarrow x + y = 60° \Rightarrow y = 60° - x$

$\sin x + \sin y = 2\cdot \sin\frac{x+y}{2}\cdot \cos\frac{x-y}{2} = \cos\frac{x-y}{2} = \cos(x - 30°)$

$AD + BC \ge CD \Leftrightarrow \frac{AD}{\sin 60°} + \frac{BC}{\sin 60°} \ge \frac{CD}{\sin 60°}$