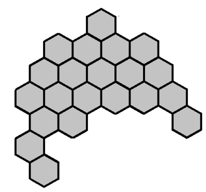
Olimpiada Internacional de Matemáticas
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año 2016/2017 Primera ronda

Problemas para el grado R5

No olvide, por favor, demostrar sus respuestas.

1. Muestre cómo dividir esta figura en tres partes iguales.

   (Dos partes son llamadas "iguales" o congruentes si es posible que una parte cubra a la otra con una coincidencia total; tal vez, teniendo que voltear una parte sobre la otra)



2. Un entero positivo es 1 unidad mayor que otro. ¿Es posible que su producto termine en 2017?

3. Pesos de 180, 181, 182,..., 200 gramos están sobre una mesa (exactamente uno de cada peso). ¿Es posible escoger algunos de estos pesos de manera que totalicen 1 kilogramo?

4. 20 ceros y 17 unos son escritos en una pizarra. En cada movimiento está permitido quitar dos números y poner en su lugar la suma de ellos. El proceso se repite hasta que quede un solo número. Un movimiento de llama "importante" si el número escrito es mayor que cada uno de los removidos. ¿Cuántos movimientos "importantes" pueden ser hechos durante este proceso? Halle todas las posibilidades y explique por qué no hay más.

5. Un paquete contiene varios chupetes de distintos sabores y producidos en diferentes países. Cada dos chupetes son diferentes, ya sea en sabor, país productor o ambos. Es sabido que para cada par de chupetes que son diferentes tanto en sabor como páis productor, el paquete contiene exactamente un chupete que es diferente en sabor de uno, y de país productor del otro. Se sabe además que en el paquete hay exactamente 5 chupetes de manzana y 7 chupetes de Rusia. ¿Cuántos chupetes podría haber en total? Halle todas las posibles respuestas y demuestre que no hay más.

6. Estacas están colocadas a lo largo de un camino, numeradas en orden: 0, 1, 2, 3 y así sucesivamente. Un jinete sobre su caballo está cerca de la estaca 0. Cada vez que el jinete dice algún número natural n, el caballo salta hacia adelante a la estaca más cercana cuyo número sea divisible para n. El jinete ha dicho todos los números desde 1 hasta 10, y el caballo ha terminado su recorrido cerca de alguna estaca. ¿Cuál podría ser el número más alto para esta estaca? Demuestre que este número es en realidad el mayor posible.

   Ejemplo: si el jinete dice los números en el orden 10, 9, 8, ..., 1 (en este orden), entonces el caballo salta a 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, y 41, y termina en 41.)

7. Liz quiere pintar dos cuadrados de diferente tamaño en una pizarra de 6×6, de modo tal que sus lados estén sobre las líneas de la cuadrícula, y no tengan ninguna celda en común. ¿De cuántas maneras ella lo puede hacer? (Dos formas obtenidas una de la otra, por rotación son consideradas distintas)

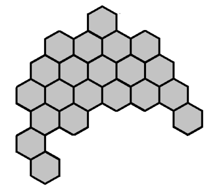
Olimpiada Internacional de Matemáticas
“Fórmula de la Unidad” / “El Tercer Milenio”
Año 2016/2017 Primera ronda

Problemas para el grado R6

No olvide, por favor, demostrar sus respuestas.

1. Muestre cómo dividir esta figura en tres partes iguales.

   (Dos partes son llamadas “iguales” o congruentes si es posible que una parte cubra a la otra con una coincidencia total; tal vez, teniendo que voltear una parte sobre la otra)

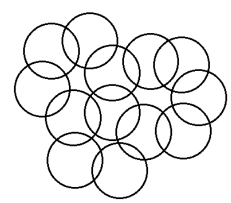


2. Un entero positivo es 2 unidad mayor que otro. ¿Es posible que su producto termine en 2017?

3. Alex decidió comprar dos cantidades idénticas de estampillas raras (para él y para su amigo). Cada cantidad consiste de tres estampillas A, B y C. Alex halló tres tiendas en internet; sin embargo, cada una de ellas estaba vendiendo estampillas en pares. La primera tienda estaba vendiendo el par “estampilla A + estampilla B” por 200 euros, la segunda estaba vendiendo el par “estampilla B + estampilla C” por 300 euros, y la tercera estaba vendiendo el par “estampilla A + estampilla C” por x euros. Alex calculó la mínima cantidad de dinero que necesitaría para esta compra. Después cambió de opinión: decidió que compraría ambos pares usando 2 de las 3 tiendas. En este caso, el precio mínimo de su compra se incrementaría en 120 euros. ¿Cuál sería el valor de x? Halle todas las posibles respuestas.

4. Algunos círculos son colocados en el plano (ver figura).

   Tres puntos son colocados dentro de cada círculo, y no hay ningún punto colocado en sus bordes. ¿Cuál sería la mínima cantidad de puntos colocados? Explique su respuesta.



5. Un paquete contiene varios chupetes de distintos sabores y producidos en diferentes países. Cada dos chupetes son diferentes, ya sea en sabor, país productor o ambos. Es sabido que para cada par de chupetes que son diferentes tanto en sabor como páis productor, el paquete contiene exactamente un chupete que es diferente en sabor de uno, y de país productor del otro. Se sabe además que en el paquete hay exactamente 5 chupetes de manzana y 7 chupetes de Rusia. ¿Cuántos chupetes podría haber en total? Halle todas las posibles respuestas y demuestre que no hay más.

6. Estacas están colocadas a lo largo de un camino, numeradas en orden: 0, 1, 2, 3 y así sucesivamente. Un jinete sobre su caballo está cerca de la estaca 0. Cada vez que el jinete dice algún número natural n, el caballo salta hacia adelante a la estaca más cercana cuyo número sea divisible para n. El jinete ha dicho todos los números desde 1 hasta 10, y el caballo ha terminado su recorrido cerca de alguna estaca. ¿Cuál podría ser el número más alto para esta estaca? Demuestre que este número es en realidad el mayor posible.

   Ejemplo: si el jinete dice los números en el orden 10, 9, 8, …, 1 (en este orden), entonces el caballo salta a 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, y 41, y termina en 41.)

7. Liz quiere pintar dos cuadrados de diferente tamaño en una pizarra de 6×6, de modo tal que sus lados estén sobre las líneas de la cuadrícula, y no tengan ninguna celda en común. ¿De cuántas maneras ella lo puede hacer? (Dos formas obtenidas una de la otra, por rotación son consideradas distintas).

Olimpiada Internacional de Matemáticas
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"

Año 2016/2017 Primera ronda

Problemas para el grado R7

No olvide, por favor, demostrar sus respuestas.

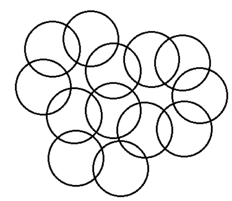
1. ¿Puede la suma de 44 números naturales ser 4 veces mayor que su producto?

2. Un entero positivo es 1 unidad mayor que otro. ¿Es posible que su producto termine en 2016?

3. ¿Puede uno dibujar tres triángulos de tal modo que tanto su intersección como su unión sean cuadriláteros convexos? Un cuadrilátero es convexo si sus diagonales se intersectan dentro de él.

4. Algunos círculos son colocados en el plano (ver figura).

   Tres puntos son colocados dentro de cada círculo, y no hay ningún punto colocado en sus bordes. ¿Cuál sería la mínima cantidad de puntos colocados? Explique su respuesta.



5. Pesos de 150, 151, 152,..., 200 gramos están sobre una mesa (exactamente uno de cada peso). Pedro está pesando varias combinaciones de estos pesos (cada combinación contiene al menos un peso). ¿Cuántos resultados diferentes puede él obtener?

6. Liz quiere pintar dos cuadrados de diferente tamaño en una pizarra de 6×6, de modo tal que sus lados estén sobre las líneas de la cuadrícula, y no tengan ninguna celda en común. ¿De cuántas maneras ella lo puede hacer? (Dos formas obtenidas una de la otra, por rotación son consideradas distintas).

7. En una escuela de niñas, cada dos niñas o se quieren o se odian la una a la otra, y estos sentimientos son mutuos. Una escuela se denomina *exitosa*, si satisface al menos una de estas condiciones:

   a) hay 100 niñas $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ tal que A_1 quiere a A_2, A_2 quiere a A_3, ..., A_{99} quiere a A_{100};

   b) hay 7 niñas $B_1, \ldots, B_7$ tal que B_1 odia a B_2, B_3 odia a B_4, y B_6 odia a B_5 y B_7.

   Halle el máximo número de niñas que terminen haciendo que la escuela no sea *exitosa*.

Olimpiada Internacional de Matemáticas
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"

Año 2016/2017 Primera ronda

Problemas para el grado R8

No olvide, por favor, demostrar sus respuestas.

1. ¿Puede la suma de 44 números naturales ser 4 veces mayor que su producto?

2. Una sección que contiene 96 páginas consecutivas de dos lados fue arrancada de un libro. ¿Puede la suma de los números de estas páginas ser igual a 20170?

3. Sean a, b, c, d, e, f enteros positivos. Halle todos los posibles valores de la expresión:
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)}+\frac{cd}{(b+c)(d+e)}+\frac{ef}{(d+e)(f+a)}.$$

4. Sea E el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $ABCD$. Las bisectrices de los ángulos DAE y EBC se intersectan en F. Halle la medida del ángulo $\angle AFB$ si $ECFD$ es un paralelogramo.

5. Pesos de 150, 151, 152,..., 200 gramos están sobre una mesa (exactamente uno de cada peso). Pedro está pesando varias combinaciones de estos pesos (cada combinación contiene al menos un peso). ¿Cuántos resultados diferentes puede él obtener?

6. Tres triángulos son dibujados sobre un plano tal que su intersección y su unión sean cuadriláteros. ¿Pueden estos dos cuadriláteros tener 6 ángulos rectos en total?

7. En una escuela de niñas, cada dos niñas o se quieren o se odian la una a la otra, y estos sentimientos son mutuos. Una escuela se denomina *exitosa*, si satisface al menos una de estas condiciones:

   a) hay 100 niñas $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ tal que A_1 quiere a A_2, A_2 quiere a A_3, ..., A_{99} quiere a A_{100};

   b) hay 7 niñas $B_1, \ldots, B_7$ tal que B_1 odia a B_2, B_3 odia a B_4, y B_6 odia a B_5 y B_7.

   Halle el máximo número de niñas que terminen hacendo que la escuela no sea *exitosa*.

Olimpiada Internacional de Matemáticas
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"

Año 2016/2017 Primera ronda

Problemas para el grado R9

No olvide, por favor, demostrar sus respuestas.

1. Una sección que contiene 96 páginas consecutivas de dos lados fue arrancada de un libro. ¿Puede la suma de los números de estas páginas ser igual a 20170?

2. Todos los vértices de un 789-ágono están pintados de rojo; más aún, 615 puntos rojos más son pintados dentro del polígono. No hay tres puntos rojos en línea recta. El polígono se divide en triángulos de tal manera que todos los puntos rojos y solo los puntos rojos, son vértices. ¿Cuántos triángulos hay ahora?

3. Sean a, b, c, d, e, f enteros positivos. Halle todos los posibles valores de la expresión:
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)}+\frac{cd}{(b+c)(d+e)}+\frac{ef}{(d+e)(f+a)}.$$

4. Sea E el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $ABCD$. Las bisectrices de los ángulos DAE y EBC se intersectan en F. Halle la medida del ángulo $\angle AFB$ si $ECFD$ es un paralelogramo.

5. Las diagonales de las caras de una caja son iguales a 4, 6 y 7 decímetros, respectivamente. ¿Podría una bola de 2 decímetros de diámetro caber dentro de esa caja?

6. Alex decidió comprar dos cantidades idénticas de estampillas raras (para él y para su amigo). Cada cantidad consiste de tres estampillas A, B y C. Alex halló tres tiendas en internet; sin embargo, cada una de ellas estaba vendiendo estampillas en pares. La primera tienda estaba vendiendo el par "estampilla A + estampilla B" por 200 euros, la segunda estaba vendiendo el par "estampilla B + estampilla C" por 300 euros, y la tercera estaba vendiendo el par "estampilla A + estampilla C" por x euros. Alex calculó la mínima cantidad de dinero que necesitaría para esta compra. Después cambió de opinión: decidió que compraría ambos pares usando 2 de las 3 tiendas. En este caso, el precio mínimo de su compra se incrementaría en 120 euros. ¿Cuál sería el valor de x? Halle todas las posibles respuestas.

7. Exprese $33x^4+578$ como la suma de los cuadrados muy pocos polinomios de coeficientes enteros que sea posible.

Olimpiada Internacional de Matemáticas
“Fórmula de la Unidad” / “El Tercer Milenio”

Año 2016/2017 Primera ronda

Problemas para el grado R10

No olvide, por favor, demostrar sus respuestas.

1. Todos los vértices de un 789-ágono están pintados de rojo; más aún, 615 puntos rojos más son pintados dentro del polígono. No hay tres puntos rojos en línea recta. El polígono se divide en triángulos de tal manera que todos los puntos rojos y solo los puntos rojos, son vértices. ¿Cuántos triángulos hay ahora?

2. Para un entero n, ¿cuál es el mayor valor posible del máximo común divisor de $n^2 + 3$ y $(n + 1)^2 + 3$?

3. Las diagonales de las caras de una caja son iguales a 4, 6 y 7 decímetros, respectivamente. ¿Podría una bola de 2 decímetros de diámetro caber dentro de esa caja?

4. Sobre los lados AB y BC de un triángulo ABC, se escogen los puntos X y Y de modo que $AX = BY$. Los puntos A, X, Y y C están sobre el mismo círculo. Sea B_1 el pie de la bisectriz del ángulo B. Pruebe que las rectas XB_1 y YC son paralelas.

5. Alex decidió comprar dos cantidades idénticas de estampillas raras (para él y para su amigo). Cada cantidad consiste de tres estampillas A, B y C. Alex halló tres tiendas en internet; sin embargo, cada una de ellas estaba vendiendo estampillas en pares. La primera tienda estaba vendiendo el par “estampilla A + estampilla B” por 200 euros, la segunda estaba vendiendo el par “estampilla B + estampilla C” por 300 euros, y la tercera estaba vendiendo el par “estampilla A + estampilla C” por x euros. Alex calculó la mínima cantidad de dinero que necesitaría para esta compra. Después cambió de opinión: decidió que compraría ambos pares usando 2 de las 3 tiendas. En este caso, el precio mínimo de su compra se incrementaría en 120 euros. ¿Cuál sería el valor de x? Halle todas las posibles respuestas.

6. Exprese $6x^4 + 5$ como la suma de los cuadrados de tantos polinomios de coeficientes enteros como sea posible.

7. El Jurado de la Olimpiada está escogiendo qué problema (A o B) usar. Todos los miembros del Jurado, uno por uno, en orden alfabético, indica el problema por el cual vota. Finalmente, el problema A recibe 11 votes, y B recibe solo 5. Más aún, después de cada votación A tiene al menos el doble de los votos del problema B. ¿De cuántos modos diferentes pudo el Jurado haber votado?

Olimpiada Internacional de Matemáticas
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"

Año 2016/2017 Primera ronda

Problemas para el grado R11

No olvide, por favor, demostrar sus respuestas.

1. ¿Cuántos enteros positivos n satisfacen la inecuación
$$\sin\frac{10\pi}{n} > \cos\frac{10\pi}{n}?$$

2. Para un entero n, ¿cuál es el mayor valor posible del máximo común divisor de n^2+3 y $(n+1)^2+3$?

3. Llamemos *números distinguidos* a los que pueden ser expresados como $2^x + 3^y$, donde x y y son enteros nonegativos. Es fácil ver que los números $5 = 2^1 + 3^1 = 2^2 + 3^0$ y $11 = 2^3 + 3^1 = 2^1 + 3^2$ son dos veces distinguidos (porque pueden ser representados de estas dos maneras). ¿Cuántos números doblemente distinguidos existen?

4. Sobre los lados AB y BC de un triángulo ABC, se escogen los puntos X y Y de modo que $AX = BY$. Los puntos A, X, Y y C están sobre el mismo círculo. Sea B_1 el pie de la bisectriz del ángulo B. Pruebe que las rectas XB_1 y YC son paralelas.

5. Un padre va a enviar 13 bolas idénticas a su hijo. Para ello compró una caja con las diagonales de sus caras iguales a 4, 6 y 7 decímetros. Resulta que una de las bolas cupo dentro de la caja. ¿Las otras 13 bolas también cabrán dentro de ella?

6. El Jurado de la Olimpiada está escogiendo qué problema (A o B) usar. Todos los miembros del Jurado, uno por uno, en orden alfabético, indica el problema por el cual vota. Finalmente, el problema A recibe 11 votes, y B recibe solo 5. Más aún, después de cada votación A tiene al menos el doble de los votos del problema B. ¿De cuántos modos diferentes pudo el Jurado haber votado?

7. ¿Puede un polinomio cúbico (es decir un polinomio de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$) con coeficientes enteros tomar los valores 1, 2, 3, 4 para algunos valores enteros de x?