

Kỳ thi Toán quốc tế
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”

Năm học 2015/2016. Vòng 1.

Đề thi dành cho Khối lớp R5

Xin vui lòng trình bày đầy đủ chứng minh cho mỗi câu trả lời.

1. Peter, Basil và Anatoly góp tiền tiết kiệm để mua một quả bóng giá 9 đô la. Biết rằng, số tiền góp của mỗi người không nhiều hơn một nửa tổng số tiền góp của hai người còn lại. Hỏi Peter đã đóng góp bao nhiêu tiền?
2. Pauline viết hai số A và B lên bảng. Victoria xóa hai số A, B và viết tổng C và tích D của chúng. Sau đó, Pauline lại xoá hai số C và D , thay bởi tổng E và tích F của chúng. Biết rằng một trong hai số E và F là số lẻ. Hỏi đó là số nào?
3. Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B , học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A . Liệu điều này có thể xảy ra không?
4. Nếu Leon bị điểm kém ở trường, cậu ta sẽ dành cả buổi tối để nói dối mẹ. Còn nếu ngược lại, cậu ta sẽ luôn nói thật. Leon có một cô em gái luôn được mẹ cho kẹo nếu như hôm đó cô bé không bị điểm kém. Một buổi tối, Leon nói với mẹ: “Hôm nay con bị nhiều điểm kém hơn em”. Hỏi cô em gái của Leon có được mẹ cho kẹo hay không?
5. Một tờ lịch ma thuật chỉ đúng ngày tất cả các ngày chẵn của tháng và sai ngày vào tất cả các ngày lẻ. Hỏi số lớn nhất các ngày liên tiếp nhau được ghi cùng ngày trên lịch là bao nhiêu? Và ngày đó có thể là ngày nào trong tháng?
6. Có bao nhiêu số có biểu diễn thập phân gồm 10 chữ số khác nhau và có chứa đoạn 0123?
7. Hình vuông 8×8 được vẽ trên tờ giấy kẻ ô vuông dọc theo các đường kẻ. Alex cắt hình vuông 8×8 theo các đường kẻ thành 7 phần với chu vi bằng nhau. Hãy chỉ ra một cách cắt của Alex.

Kỳ thi Toán quốc tế
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”

Năm học 2015/2016. Vòng 1.

Đề thi dành cho Khối lớp R6

Xin vui lòng trình bày đầy đủ chứng minh cho mỗi câu trả lời.

1. Có 14 người ngồi quanh một vòng tròn. Peter, Victoria, Anatoly và Genghis đang ngồi cạnh nhau theo thứ tự và các bạn có các đồng xu mệnh giá 1, 2, 5 và 10 rúp. Một người bất kì có thể đưa một đồng xu của mình cho người ở bên trái hoặc bên phải của mình nếu có đúng 3 người ngồi giữa họ. Sau một lúc chuyển như vậy, các bạn Peter, Victoria, Anatoly và Genghis lại nhận được các đồng xu. Hỏi lúc này, bạn nào đang cầm đồng xu nào? Hãy chỉ ra tất cả các khả năng và chứng minh không còn trường hợp nào khác.
2. Pauline viết hai số A và B lên bảng. Victoria xóa hai số A, B và viết tổng C và tích D của chúng. Sau đó, Pauline lại xóa hai số C và D , thay bởi tổng E và tích F của chúng. Biết rằng một trong hai số E và F là số lẻ. Hỏi đó là số nào?
3. Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B , học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A . Liệu điều này có thể xảy ra không?
4. Nếu Leon bị điểm kém ở trường, cậu ta sẽ dành cả buổi tối để nói dối mẹ. Còn nếu ngược lại, cậu ta sẽ luôn nói thật. Leon có một cô em gái luôn được mẹ cho kẹo nếu như hôm đó cô bé không bị điểm kém. Một buổi tối, Leon nói với mẹ: “Hôm nay con bị nhiều điểm kém hơn em”. Hỏi cô em gái của Leon có được mẹ cho kẹo hay không?
5. Một tờ lịch ma thuật chỉ đúng ngày tất cả các ngày chẵn của tháng và sai ngày vào tất cả các ngày lẻ. Hỏi số lớn nhất các ngày liên tiếp nhau được ghi cùng ngày trên lịch là bao nhiêu? Và ngày đó có thể là ngày nào trong tháng?
6. Có bao nhiêu số có biểu diễn thập phân gồm 10 chữ số khác nhau và có chứa đoạn 0123 hoặc đoạn 3210?
7. Hình vuông 8×8 được vẽ trên tờ giấy kẻ ô vuông dọc theo các đường kẻ. Alex cắt hình vuông 8×8 theo các đường kẻ thành 7 phần với chu vi bằng nhau. Hãy chỉ ra một cách cắt của Alex.

Kỳ thi Toán quốc tế
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”

Năm học 2015/2016. Vòng 1.

Đề thi dành cho Khối lớp R7

Xin vui lòng trình bày đầy đủ chứng minh cho mỗi câu trả lời.

1. Một tờ lịch ma thuật chỉ đúng ngày tất cả các ngày chẵn của tháng và sai ngày vào tất cả các ngày lẻ. Hỏi số lớn nhất các ngày liên tiếp nhau được ghi cùng ngày trên lịch là bao nhiêu? Và ngày đó có thể là những ngày nào?
2. Hãy điền vào các ô của bảng vuông 5×5 Các số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột là bằng nhau và nhỏ nhất có thể. Biết rằng, các số 1, 2, 3, 4, 2015 đã được điền trước trên một đường chéo.
3. Hình vuông 8×8 được vẽ trên tờ giấy kẻ ô vuông dọc theo các đường kẻ. Alex cắt hình vuông 8×8 theo các đường kẻ thành 7 phần với chu vi bằng nhau. Hãy chỉ ra một cách cắt của Alex.
4. Có 27 con gián tham gia một cuộc chạy đua. Trong mỗi vòng sẽ có ba con gián chạy. Mỗi con gián chạy với tốc độ cố định, không đổi giữa các vòng đua, và tốc độ của các con gián là đôi một khác nhau. Sau mỗi vòng, người ta ghi lại thứ tự về đích của các con gián tham gia vòng đua đó. Hỏi 14 vòng đua có đủ để xác định chính xác theo thứ tự hai con gián chạy nhanh nhất không?
5. Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B , học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A . Liệu điều này có thể xảy ra không?
6. Ta nói một số nguyên dương là *đẹp* nếu nó là tích các giai thừa của các số nguyên tố (không nhất thiết phải phân biệt). Ta gọi một số hữu tỉ dương là *tốt* nếu nó là tỉ số giữa hai số nguyên dương đẹp. Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương đều tốt
7. Ta gọi một số nguyên dương là *đẹp* nếu dãy các chữ số của nó tăng thực sự, ví dụ 1589 là số tăng còn 447 thì không. Hãy tìm số nhỏ nhất các số nguyên dương đẹp với tổng là 2015.

Kỳ thi Toán quốc tế
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”

Năm học 2015/2016. Vòng 1.

Đề thi dành cho Khối lớp R8

Xin vui lòng trình bày đầy đủ chứng minh cho mỗi câu trả lời.

1. Hãy điền vào các ô của bảng vuông 5×5 Các số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột là bằng nhau và nhỏ nhất có thể. Biết rằng, các số 1, 2, 3, 4, 2015 đã được điền trước trên một đường chéo.
2. Có 27 con gián tham gia một cuộc chạy đua. Trong mỗi vòng sẽ có ba con gián chạy. Mỗi con gián chạy với tốc độ cố định, không đổi giữa các vòng đua, và tốc độ của các con gián là đôi một khác nhau. Sau mỗi vòng, người ta ghi lại thứ tự về đích của các con gián tham gia vòng đua đó. Hỏi 14 vòng đua có đủ để xác định chính xác theo thứ tự hai con gián chạy nhanh nhất không?
3. Hãy tìm một số nguyên dương sao cho tích các ước tự nhiên của nó là 10^{90} .
4. John có 12 que gỗ với độ dài mỗi que là một số nguyên dương không vượt quá 56. Chứng minh rằng John có 3 que có thể tạo thành một tam giác.
5. Ta nói một số nguyên dương là *đẹp* nếu nó là tích các giai thừa của các số nguyên tố (không nhất thiết phải phân biệt). Ta gọi một số hữu tỉ dương là *tốt* nếu nó là tỉ số giữa hai số nguyên dương đẹp. Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương đều tốt
6. Cho tam giác $\triangle ABC$ với $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ và D là trung điểm đoạn thẳng BC . Tìm góc $\angle BAD$?
7. Ta nói rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B nếu điểm của A cao hơn điểm của B trong phần lớn các bài kiểm tra. Sau 3 bài kiểm tra, thầy giáo nhận xét rằng học sinh A học tốt hơn học sinh B , học sinh B học tốt hơn học sinh C và học sinh C lại học tốt hơn học sinh A . Liệu điều này có thể xảy ra không?

Kỳ thi Toán quốc tế
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”

Năm học 2015/2016. Vòng 1.

Đề thi dành cho Khối lớp R9

Xin vui lòng trình bày đầy đủ chứng minh cho mỗi câu trả lời.

1. Các đỉnh của một đa giác đều 12 cạnh được tô màu xanh và đỏ. Biết rằng trong 3 đỉnh bất kì tạo thành một tam giác đều, có ít nhất 2 đỉnh màu đỏ. Chứng minh rằng ta có thể chọn 4 đỉnh tạo thành một hình vuông với ít nhất 3 đỉnh đỏ.
2. Ta nói một số nguyên dương là *đẹp* nếu nó là tích các giai thừa của các số nguyên tố (không nhất thiết phải phân biệt). Ta gọi một số hữu tỉ dương là *tốt* nếu nó là tỉ số giữa hai số nguyên dương đẹp. Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương đều tốt.
3. Có 27 con gián tham gia một cuộc chạy đua. Trong mỗi vòng sẽ có ba con gián chạy. Mỗi con gián chạy với tốc độ cố định, không đổi giữa các vòng đua, và tốc độ của các con gián là đôi một khác nhau. Sau mỗi vòng, người ta ghi lại thứ tự về đích của các con gián tham gia vòng đua đó. Hỏi 14 vòng đua có đủ để xác định chính xác theo thứ tự hai con gián chạy nhanh nhất không?
4. Cho tam giác $\triangle ABC$ với $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ và D là trung điểm đoạn thẳng BC . Tìm góc $\angle BAD$?
5. John có 12 que gỗ với độ dài mỗi que là một số nguyên dương không vượt quá 56. Chứng minh rằng John có 3 que có thể tạo thành một tam giác.
6. Hãy tìm một số nguyên dương sao cho tích các ước tự nhiên của nó là 10^{90} .
7. Tất cả chúng ta đều biết $3^2 + 4^2 = 5^2$. Bên cạnh đó, không phải ai cũng biết rằng $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Liệu có tồn tại hay không 2015 số nguyên dương liên tiếp sao cho tổng bình phương của 1008 số đầu tiên bằng tổng bình phương của 1007 số sau đó?

Kỳ thi Toán quốc tế
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”

Năm học 2015/2016. Vòng 1.

Đề thi dành cho Khối lớp R10

Xin vui lòng trình bày đầy đủ chứng minh cho mỗi câu trả lời.

1. Hai chú thỏ Bugs và Roger cá cược xem ai nhanh hơn. Để xác định người chiến thắng, hai bạn quyết định tổ chức một cuộc thi. Mỗi bạn thỏ sẽ nhảy 50 mét theo một hướng và sau đó quay lại để nhảy ngược lại. Biết rằng, độ dài mỗi bước nhảy của Bugs là 50 cm và của Roger là 60cm, nhưng thỏ Bugs nhảy được 6 bước trong khi Roger chỉ nhảy được 5 bước. Hỏi ai sẽ giành được chiến thắng?
2. Với những giá trị nào của n thì ta có thể chia một hình vuông thành n hình chữ nhật đồng dạng sao cho có ít nhất hai trong số chúng là không bằng nhau?
3. Có tồn tại hay không các số nguyên dương a và b sao cho

$$\text{lcm}(a, b) = \text{lcm}(a + 2015, b + 2016)?$$

Ở đây, $\text{lcm}(a, b)$ được kí hiệu cho Bội chung nhỏ nhất của hai số a và b .

4. Cho tam giác $\triangle ABC$ với $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ và D là trung điểm đoạn thẳng BC . Tìm góc $\angle BAD$?
5. Hãy điền vào các ô của bảng vuông 10×10 các số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột là bằng nhau và nhỏ nhất có thể. Biết rằng, các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 và 2015 đã được điền trước trên một đường chéo.
6. Đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh AB , BC và AC tại các điểm C_1 , A_1 và B_1 tương ứng. Chứng minh rằng

$$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$

7. Tất cả chúng ta đều biết $3^2 + 4^2 = 5^2$ nhưng không phải ai cũng biết $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Khẳng định sau đúng hay sai: Với mọi số nguyên dương k , có $2k + 1$ số nguyên dương liên tiếp sao cho tổng bình phương của $k + 1$ số đầu tiên bằng tổng bình phương của k số còn lại?

Kỳ thi Toán quốc tế
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”

Năm học 2015/2016. Vòng 1.

Đề thi dành cho Khối lớp R11

Xin vui lòng trình bày đầy đủ chứng minh cho mỗi câu trả lời.

1. Hai chú thỏ Bugs và Roger cá cược xem ai nhanh hơn. Để xác định người chiến thắng, hai bạn quyết định tổ chức một cuộc thi. Mỗi bạn thỏ sẽ nhảy 50 mét theo một hướng và sau đó quay lại để nhảy ngược lại. Biết rằng, độ dài mỗi bước nhảy của Bugs là 50 cm và của Roger là 60cm, nhưng thỏ Bugs nhảy được 6 bước trong khi Roger chỉ nhảy được 5 bước. Hỏi ai sẽ giành được chiến thắng?
2. Với những giá trị nào của n thì ta có thể chia một hình vuông thành n hình chữ nhật đồng dạng sao cho có ít nhất hai trong số chúng là không bằng nhau?
3. Có tồn tại hay không các số nguyên dương a và b sao cho

$$\text{lcm}(a, b) = \text{lcm}(a + 2015, b + 2016)?$$

Ở đây, $\text{lcm}(a, b)$ được kí hiệu cho Bội chung nhỏ nhất của hai số a và b .

4. Cho tam giác $\triangle ABC$ với $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ và D là trung điểm đoạn thẳng BC . Tìm góc $\angle BAD$?
5. Tại mỗi điểm có tọa độ nguyên trên mặt phẳng tọa độ trồng một cây với đường kính 10^{-6} . Một bác tiêu phu đốn cây tại gốc tọa độ $(0,0)$ và đứng trên gốc cây. Hỏi phần mặt phẳng mà anh ta nhìn thấy có bị giới hạn hay không? Ở đây, các cây được coi như là một cột hình trụ vô hạn với các trục chứa các điểm nguyên của mặt phẳng tọa độ.
6. Hãy chỉ ra một bộ 4 số dương không thể là bán kính của bốn hình cầu đôi một tiếp xúc nhau.
7. Tất cả chúng ta đều biết $3^2 + 4^2 = 5^2$ nhưng không phải ai cũng biết $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Khẳng định sau đúng hay sai: Với mọi số nguyên dương k , có $2k + 1$ số nguyên dương liên tiếp sao cho tổng bình phương của $k + 1$ số đầu tiên bằng tổng bình phương của k số còn lại?