

# Международная олимпиада “Формула Единства” 2012/13

## Решения задач второго тура для 9–10 классов

1. В числе 123456789 можно взять любые 2 цифры одинаковой четности и заменить каждую из них на среднее арифметическое. Можно ли такими операциями получить число, большее 800000000?

**Решение.** Да, можно.  $123456789 \rightarrow 222456789 \rightarrow 322356789 \rightarrow 422346789 \rightarrow 522345789 \rightarrow 622345689 \rightarrow 722345679 \rightarrow 822345678$ .

2. Сумма трех различных натуральных чисел равна 2013. Какое наибольшее значение может принимать их НОД?

**Решение.** Ответ: 183. Примером трех чисел с суммой 2013 и наибольшим общим делителем 183 могут служить 183,  $183 \cdot 2 = 366$ ,  $183 \cdot 8 = 1464$ . Докажем, что значение  $d$  наибольшего общего делителя не может быть больше 183. В самом деле, если обозначить наши числа  $da$ ,  $db$ ,  $dc$ , то  $2013 = d(a + b + c)$ . Заметим, что  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — различные числа, поэтому их сумма  $a + b + c$  строго больше 3. Но она делит 2013, а следующий после 3 делитель числа 2013 — это 11. Таким образом,  $a + b + c \geq 11$ ,  $d = 2013/(a + b + c) \leq 2013/11 = 183$ , что и требовалось.

3. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть  $Z$  — точка пересечения  $AU$  и  $CX$ . Оказалось, что  $AU = UC$  и  $AB = CZ$ . Докажите, что точки  $B, Y, Z, X$  лежат на одной окружности.

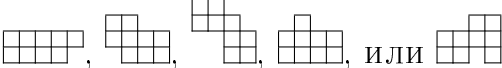
**Решение.** Рассмотрим описанные окружности треугольников  $CZY$  и  $ABY$ . Их хорды  $CZ$  и  $AB$  равны, а углы  $\angle CYZ$  и  $\angle AYB$ , опирающиеся на эти хорды, составляют в сумме  $\pi$ . Отсюда следует, что равны сами окружности. Тогда углы  $\angle CZY$  и  $\angle ABY$ , опирающиеся на равные хорды  $CY$ ,  $AY$  этих равных окружностей, либо равны, либо дают в сумме  $\pi$ . Второй случай невозможен, поскольку тогда сумма четырех ( $\angle CYZ$ ,  $\angle AYB$ ,  $\angle CZY$ ,  $\angle ABY$ ) из шести углов треугольников  $CZY$  и  $ABY$  давала бы в сумме  $2\pi$ , что невозможно:  $2\pi$  есть сумма всех шести углов двух этих треугольников. Следовательно,  $\angle CZY = \angle ABY$ , тогда  $\angle XBY + \angle XZY = \pi$ , откуда и следует, что четырехугольник  $BXZY$  вписан в окружность.

4. Для положительных чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  докажите неравенство

$$(1 + x + 2x^2)(2 + 3y + y^2)(4 - 11z + 8z^2) \geq 7xyz.$$

**Решение.** Поделим на  $xyz$  и перепишем неравенство в равносильном виде  $(1/x + 1 + 2x)(2/y + 3 + y)(4/z - 11 + 8z) \geq 7$ . Оценим каждую из скобок по отдельности, применяя неравенство о средних  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  к парам чисел  $(1/x, 2x)$ ,  $(2/y, y)$ ,  $(4/z, 8z)$ . Получим, что

$$\begin{aligned} (1/x + 1 + 2x)(2/y + 3 + y)(4/z - 11 + 8z) &\geq (2\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} + 3)(8\sqrt{2} - 11) = \\ &= (8\sqrt{2} + 11)(8\sqrt{2} - 11) = 128 - 121 = 7, \end{aligned}$$

5. В конструкторе  $n$  плоских фигурок из 9 квадратиков, каждая из которых имеет вид . Докажите, что если  $n$  нечетно, то из них нельзя сложить прямоугольник  $9 \times n$ .

**Решение.** Предположим, что  $n$  нечетно, но прямоугольник сложить удалось. Не умаляя общности, в нем 9 строк и  $n$  столбцов. Закрасим 5 строк через 1, тогда всего окажется закрашено  $5n$  клеток, а в каждой фигурке, как легко видеть, не более 5. Следовательно, в каждой фигурке окажется закрашено ровно 5 клеток. Нетрудно убедиться, что каждая фигурка, содержащая ровно 5 закрашенных клеток, содержит четное число клеток в каждой незакрашенной строчке. Тогда, рассматривая любую одну незакрашенную строчку, убеждаемся, что наши фигурки занимают в ней четное число клеток — с другой же стороны, клеток в ней  $n$ . Отсюда  $n$  четно — противоречие.