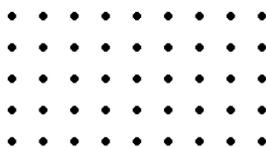




Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

### Задачи для 5 класса

1. Перемножили несколько однозначных чисел, среди которых нет ни двоек, ни пятёрок. Могло ли получиться число, записанное только двойками и пятёрками?
2. Дана сетка  $5 \times 9$  точек (см. рисунок). Нарисуйте 15 треугольников с вершинами в этих точках так, чтобы эти треугольники не пересекались и даже не соприкасались.



3. На ёлке росло вдвое больше шишек, чем на сосне. Вася сбил несколько шишек, и теперь на сосне растёт втрое больше шишек, чем на ёлке. Сможет ли Вася сбить с этих деревьев ещё столько же шишек, сколько уже сбил?
4. Жители Страны Чудес делятся на хоббитов и викингов. Однажды 27 жителей сели за круглый стол так, чтобы расстояния между соседями были одинаковыми. Оказалось, что между каждыми двумя хоббитами сидели как минимум два викинга. Докажите, что найдутся три викинга, сидящих на равных расстояниях друг от друга.
5. Числа от 1 до 49 расставлены в клетках квадрата  $7 \times 7$  так, что количество нечётных чисел в любых двух строчках было различным. Может ли оказаться, что количество нечётных чисел в любых двух столбцах тоже различно?
6. Марк предлагает Вере сыграть в такую игру. Сначала Вера выбирает, кто из них сделает первый ход. Затем они по очереди записывают по одной любой цифре от 1 до 9. Повторять цифры нельзя. Если в какой-то момент окажется, что какие-то две из записанных цифр в сумме дают третью (уже записанную), то проигравшим считается игрок, допустивший такую ситуацию. Что должна сделать Вера, чтобы выиграть?
7. В банкомате лежат купюры в 100, 200, 500, 1000, 2000 и 5000 рублей. У Васи есть карточка, на которой лежит 10000 рублей. Вася хочет снять с карточки деньги, потом перейти к автомату по продаже билетов и купить в нём билет. Про билет Васе известно, что его цена делится на 100 рублей и что она не больше 10000 рублей. Автомат по продаже билетов сдачи не выдаёт. Может ли Вася снять деньги в банкомате не более чем в два приёма так, чтобы потом гарантированно купить билет? (Снимая деньги в банкомате, Вася может указать сумму, но не может повлиять на то, какими купюрами она будет выдана.)

- Срок проведения отборочного тура олимпиады — с **15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в январе–феврале 2019 года.
- Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
- Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). В исключительных случаях мы готовы принять работу в бумажном виде (по почте). Подробные инструкции по отправке решений есть на сайте [formulo.org](http://formulo.org).
- В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует** (личные данные указываются отдельно при загрузке работы на сайт).
- Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.



Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

### Задачи для 6 класса

1. Перемножили несколько однозначных чисел, среди которых нет ни двоек, ни пятёрок. Могло ли получиться число, записанное только двойками и пятёрками?
2. На ёлке росло вдвое больше шишек, чем на сосне. Вася сбил несколько шишек, и теперь на сосне растёт втрое больше шишек, чем на ёлке. Сможет ли Вася сбить с этих деревьев ещё столько же шишек, сколько уже сбил?
3. Жители Страны Чудес делятся на хоббитов и викингов. Однажды 27 жителей сели за круглый стол так, чтобы расстояния между соседями были одинаковыми. Оказалось, что между каждыми двумя хоббитами сидели как минимум два викинга. Докажите, что найдутся три викинга, сидящих на равных расстояниях друг от друга.
4. Числа от 1 до 49 расставлены в клетках квадрата  $7 \times 7$  так, что количество нечётных чисел в любых двух строчках было различным. Может ли оказаться, что количество нечётных чисел в любых двух столбцах тоже различно?
5. Для каждого четырёхзначного числа без нулей в записи можно перечислить все перестановки цифр, включая само число, по возрастанию. Например, для числа 3433 получится такой список: 3334, 3343, 3433, 4333. Назовём число несчастным, если оно стоит в своём списке на 13-м месте. Сколько существует несчастных чисел?
6. В банкомате лежат купюры в 100, 200, 500, 1000, 2000 и 5000 рублей. У Васи есть карточка, на которой лежит 10000 рублей. Вася хочет снять с карточки деньги, потом перейти к автомату по продаже билетов и купить в нём билет. Про билет Васе известно, что его цена делится на 100 рублей и что она не больше 10000 рублей. Автомат по продаже билетов сдачи не выдаёт. Может ли Вася снять деньги в банкомате не более чем в два приёма так, чтобы потом гарантированно купить билет? (Снимая деньги в банкомате, Вася может указать сумму, но не может повлиять на то, какими купюрами она будет выдана.)
7. Можно ли разрезать квадрат на 144 равных части и составить из них три квадрата, среди которых нет двух равных?

● Срок проведения отборочного тура олимпиады — с **15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в январе–феврале 2019 года.

● Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.

● Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). В исключительных случаях мы готовы принять работу в бумажном виде (по почте). Подробные инструкции по отправке решений есть на сайте [formulo.org](http://formulo.org).

● В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует** (личные данные указываются отдельно при загрузке работы на сайт).

● Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.



Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

### Задачи для 7 класса

1. В пятизначном числе, не содержащем нулей, стёрли первую цифру, и оно уменьшилось в целое количество раз. В оставшемся числе снова стёрли первую цифру, и оно опять уменьшилось в целое количество раз. Потом первую цифру стирали ещё дважды, и каждый раз число уменьшалось в целое количество раз. Приведите пример исходного числа.
2. Жители Страны Чудес делятся на хоббитов и викингов. Однажды 27 жителей сели за круглый стол так, чтобы расстояния между соседями были одинаковыми. Оказалось, что между каждыми двумя хоббитами сидели как минимум два викинга. Докажите, что найдутся три викинга, сидящих на равных расстояниях друг от друга.
3. Число представимо в виде суммы 8 простых чисел, но не представимо в виде суммы 8 составных чисел. А представимо ли это число в виде произведения простого числа на составное?
4. Числа от 1 до 49 расставлены в клетках квадрата  $7 \times 7$  так, что количество нечётных чисел в любых двух строчках было различным. Может ли оказаться, что количество нечётных чисел в любых двух столбцах тоже различно?
5. Для каждого четырёхзначного числа без нулей в записи можно перечислить все перестановки цифр, включая само число, по возрастанию. Например, для числа 3433 получится такой список: 3334, 3343, 3433, 4333. Назовём число отличным, если оно стоит в своём списке на пятом месте. Сколько существует отличных чисел?
6. Три коллекционера картин  $A$ ,  $B$  и  $C$  выставили часть своих картин на аукцион.  $A$  выставил 3% своих картин,  $B$  — 7%,  $C$  — 20%.  $B$  купил все картины, выставленные  $A$ ,  $C$  — выставленные  $B$ ,  $A$  — выставленные  $C$ . Какое наименьшее (ненулевое) количество картин могло быть выставлено на аукцион, если количество картин у каждого коллекционера не изменилось?
7. Можно ли разрезать квадрат на 144 равных части и составить из них три квадрата, среди которых нет двух равных?

● Срок проведения отборочного тура олимпиады — с **15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в январе–феврале 2019 года.

- Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
- Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). В исключительных случаях мы готовы принять работу в бумажном виде (по почте). Подробные инструкции по отправке решений есть на сайте [formulo.org](http://formulo.org).
- В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует** (личные данные указываются отдельно при загрузке работы на сайт).
- Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.



Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

### Задачи для 8 класса

1. В пятизначном числе, не содержащем нулей, стёрли первую цифру, и оно уменьшилось в целое количество раз. В оставшемся числе снова стёрли первую цифру, и оно опять уменьшилось в целое количество раз. Потом первую цифру стирали ещё дважды, и каждый раз число уменьшалось в целое количество раз. Приведите пример исходного числа.
2. Жители Страны Чудес делятся на хоббитов и викингов. Однажды 27 жителей сели за круглый стол так, чтобы расстояния между соседями были одинаковыми. Оказалось, что между каждыми двумя хоббитами сидели как минимум два викинга. Докажите, что найдутся три викинга, сидящих на равных расстояниях друг от друга.
3. Сто баранов бегут в ряд на расстоянии 6 метров друг от друга со скоростью 5 км/ч. Навстречу им со скоростью 1 км/ч идет пастух, который при встрече с бараном мгновенно разворачивает его в противоположном направлении, и тот продолжает бежать с прежней скоростью. Найдите расстояние между баранами при их обратном движении.
4. Три коллекционера картин  $A$ ,  $B$  и  $C$  выставили часть своих картин на аукцион.  $A$  выставил 3% своих картин,  $B$  — 7%,  $C$  — 20%.  $B$  купил все картины, выставленные  $A$ ,  $C$  — выставленные  $B$ ,  $A$  — выставленные  $C$ . Какое наименьшее (ненулевое) количество картин могло быть выставлено на аукцион, если количество картин у каждого коллекционера не изменилось?
5. На сторонах  $AB$  и  $BC$  квадрата  $ABCD$  построены равносторонние треугольники  $ABK$  и  $BCE$ , причём точка  $K$  лежит внутри квадрата, а точка  $E$  — вне его. Докажите, что  $K$  лежит на отрезке  $DE$ .
6. Можно ли разрезать квадрат на 144 равных части и составить из них три квадрата, среди которых нет двух равных?
7. В теннисном турнире участвовали  $n$  игроков, причём каждый с каждым сыграл по одному матчу. Для какого минимального  $n$  в любом таком турнире найдутся 4 игрока  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $T$  таких, что  $X$  обыграл  $Y$ ,  $Z$  и  $T$ ;  $Y$  обыграл  $Z$  и  $T$ ;  $Z$  обыграл  $T$ ?

• Срок проведения отборочного тура олимпиады — с **15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в январе–феврале 2019 года.

• Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.

• Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). В исключительных случаях мы готовы принять работу в бумажном виде (по почте). Подробные инструкции по отправке решений есть на сайте [formulo.org](http://formulo.org).

• В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует** (личные данные указываются отдельно при загрузке работы на сайт).

• Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.



Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

## Задачи для 9 класса

1. В пятизначном числе, не содержащем нулей, стёрли первую цифру, и оно уменьшилось в целое количество раз. В оставшемся числе снова стёрли первую цифру, и оно опять уменьшилось в целое количество раз. Потом первую цифру стирали ещё дважды, и каждый раз число уменьшалось в целое количество раз. Приведите пример исходного числа.
2. Кирилл придумал два квадратных трёхчлена, корнями которых являются натуральные числа. Потом он сложил их и обнаружил, что корнями суммарного трёхчлена тоже являются натуральные числа. Могут ли все шесть корней оказаться различными?
3. Сто баранов бегут в ряд на расстоянии 6 метров друг от друга со скоростью 5 км/ч. Навстречу им со скоростью 1 км/ч идет пастух, который при встрече с бараном мгновенно разворачивает его в противоположном направлении, и тот продолжает бежать с прежней скоростью. Найдите расстояние между баранами при их обратном движении.
4. На сторонах  $AB$  и  $BC$  квадрата  $ABCD$  построены равносторонние треугольники  $ABK$  и  $BCE$ , причём точка  $K$  лежит внутри квадрата, а точка  $E$  — вне его. Докажите, что  $K$  лежит на отрезке  $DE$ .
5. Назовём популярностью цифры количество чисел из набора  $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{999999}$ , которые начинаются с этой цифры. Докажите, что популярность каких-то двух ненулевых цифр различается не менее чем в 5 раз.
6. Диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны. Могут ли его стороны выражаться четырьмя последовательными целыми числами?
7. В теннисном турнире участвовали  $n$  игроков, причём каждый с каждым сыграл по одному матчу. Для какого минимального  $n$  в любом таком турнире найдутся 4 игрока  $X, Y, Z$  и  $T$  таких, что  $X$  обыграл  $Y, Z$  и  $T$ ;  $Y$  обыграл  $Z$  и  $T$ ;  $Z$  обыграл  $T$ ?

• Срок проведения отборочного тура олимпиады — с **15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в январе–феврале 2019 года.

- Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
- Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). В исключительных случаях мы готовы принять работу в бумажном виде (по почте). Подробные инструкции по отправке решений есть на сайте [formulo.org](http://formulo.org).
- В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует** (личные данные указываются отдельно при загрузке работы на сайт).
- Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.



Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

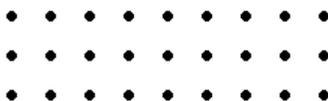
### Задачи для 10 класса

1. Существуют ли три различных квадратных трёхчлена, произведение любых двух из которых делится на третий?
2. Числа от 1 до 49 расставлены в клетках квадрата  $7 \times 7$  так, что количество нечётных чисел в любых двух строчках было различным. Может ли оказаться, что количество нечётных чисел в любых двух столбцах тоже различно?
3. Постройте множество точек на координатной плоскости, для которых выражение

$$(x^2 + y^2 - 4y + 3)^2 (3 - \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y - 3)^2})$$

принимает максимально возможное значение.

4. Назовём популярностью цифры количество чисел из набора  $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{999999}$ , которые начинаются с этой цифры. Докажите, что популярность каких-то двух ненулевых цифр различается не менее чем в 5 раз.
5. Дана сетка  $m \times n$  точек, причём общее количество точек делится на 3 (например, на рисунке показана сетка  $3 \times 9$ ). При каких  $m$  и  $n$  нельзя нарисовать  $\frac{mn}{3}$  треугольников с вершинами в этих точках так, чтобы треугольники не пересекались и даже не соприкасались?



6. Биссектрисы  $AK$ ,  $BL$ ,  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$ . Докажите, что  $\frac{IK}{IA} + \frac{IL}{IB} + \frac{IM}{IC} \geq \frac{3}{2}$ .
7. Есть сто чисел, изначально равных нулю. За один ход можно выбрать 9 чисел и уменьшить одно из них на 1, второе на 2, третье на 3, ... восьмое на 8, но зато девятое увеличить на 9. Какое наибольшее количество чисел можно сделать положительными с помощью таких операций?

• Срок проведения отборочного тура олимпиады — с **15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в январе–феврале 2019 года.

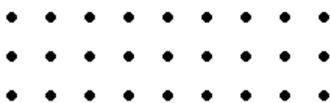
- Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
- Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). В исключительных случаях мы готовы принять работу в бумажном виде (по почте). Подробные инструкции по отправке решений есть на сайте [formulo.org](http://formulo.org).
- В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует** (личные данные указываются отдельно при загрузке работы на сайт).
- Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.



Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

### Задачи для 11 класса

1. Найдите два положительных числа, если квадрат первого из них в 16 раз больше куба второго, а квадрат второго числа в 2 раза меньше куба первого.
2. Числа от 1 до 49 расставлены в клетках квадрата  $7 \times 7$  так, что количество нечётных чисел в любых двух строчках было различным. Может ли оказаться, что количество нечётных чисел в любых двух столбцах тоже различно?
3. Назовём популярностью цифры количество чисел из набора  $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{999999}$ , которые начинаются с этой цифры. Докажите, что популярность каких-то двух ненулевых цифр различается не менее чем в 5 раз.
4. Дана сетка  $m \times n$  точек, причём общее количество точек делится на 3 (например, на рисунке показана сетка  $3 \times 9$ ). При каких  $m$  и  $n$  нельзя нарисовать  $\frac{mn}{3}$  треугольников с вершинами в этих точках так, чтобы треугольники не пересекались и даже не соприкасались?



5. Биссектрисы  $AK$ ,  $BL$ ,  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$ . Докажите, что  $\frac{IK}{IA} + \frac{IL}{IB} + \frac{IM}{IC} \geq \frac{3}{2}$ .
6. Есть сто чисел, изначально равных нулю. За один ход можно выбрать 9 чисел и уменьшить одно из них на 1, второе на 2, третье на 3, ... восьмое на 8, но зато девятое увеличить на 9. Какое наибольшее количество чисел можно сделать положительными с помощью таких операций?
7. Приведите пример многогранника, проекции которого на три координатных плоскости — правильный треугольник, правильный четырёхугольник и правильный шестиугольник. Укажите координаты каждой из вершин многогранника, приведите список его рёбер и граней.

- Срок проведения отборочного тура олимпиады — с **15 октября по 12 ноября включительно**. Призёры отборочного этапа будут приглашены на заключительный этап, проходящий в январе–феврале 2019 года.
- Помните, что в большинстве задач требуется не только ответ, но и его полное обоснование.
- Олимпиадные работы принимаются в электронном виде (допустимы как текстовые файлы, так и отсканированные копии бумажных работ). В исключительных случаях мы готовы принять работу в бумажном виде (по почте). Подробные инструкции по отправке решений есть на сайте [formulo.org](http://formulo.org).
- В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует** (личные данные указываются отдельно при загрузке работы на сайт).
- Работы с признаками списывания и коллективного творчества рассматриваться не будут.