

# *Formula of Unity Olympiad*

*2018- 2019. Round 1*

Language: Persian (Farsi)

Translated by: Amir Reza Arab

تاریخ برگزاری مرحله ی اول: ۲۷ مهر تا ۲۱ آبان ۱۳۹۷

پایه های تمصیلی: پنجم ابتدایی تا یازدهم متوسطه

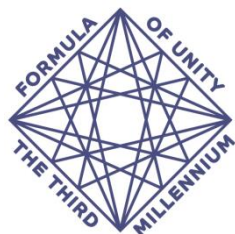
تعداد مسائل: هفت مساله در هر پایه ی تمصیلی

لطفا دفترچه ی پاسخ نامه را از وب گاه زیر دانلود و آیین نامه ی مربوطه را به دقت مطالعه نمایید.

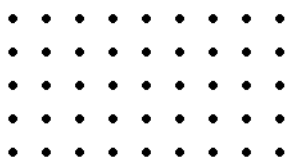
*Email:* [formulo.iran@yahoo.com](mailto:formulo.iran@yahoo.com)

*Website:* [WWW.MathSymbol.ir](http://WWW.MathSymbol.ir)

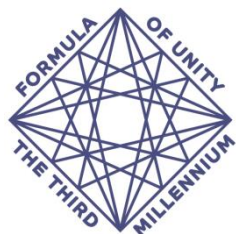


**مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹- پایه ی پنجم ابتدایی**

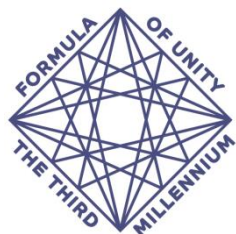
- ۱- جیمز چند عدد یک رقمی که در میان آن ها، هیچ دو یا پنجی نبود را در هم ضرب کرد. آیا او می تواند عددی به دست آورده باشد که رقم هایش فقط دو و پنج باشند؟
- ۲- شبکه ی مستطیلی  $5 \times 9$  ای موجود است (شکل زیر). ۱۵ مثلث غیر متقاطع (هیچ دو تای آن ها بر محیط هایشان نقاط مشترک ندارند) را که رئوس آن ها نقاط شبکه هستند، رسم کنید.



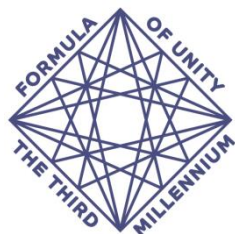
- ۳- تعداد کاج های درخت صنوبری دو برابر تعداد کاج های درخت کاجی است. پیتیر چند کاج کند و حالا تعداد کاج های درخت کاج سه برابر تعداد کاج های درخت صنوبر است. آیا پیتیر می تواند به اندازه ی تعداد کاج هایی که کنده، از این درخت ها کاج بکند؟
- ۴- هابیت ها و وایکینگ ها در سرزمین عجایب زندگی می کنند. روزی ۲۷ ساکن این سرزمین، دور میز گردی نشستند به طوری که فاصله های بین موجودات کنار هم، برابر بودند. معلوم شد که بین هر دو هابیتی، حداقل دو وایکینگ نشسته اند. ثابت کنید سه وایکینگ هستند که از یکدیگر هم فاصله اند.
- ۵- اعداد ۱ تا ۴۹ در خانه های مربعی  $7 \times 7$  نوشته شده اند. تعداد اعداد فرد در هر دو ردیف، متفاوت هستند. آیا امکان دارد تعداد اعداد فرد در هر دو ستون نیز متفاوت باشند؟
- ۶- جان به آنا پیشنهاد انجام یک بازی را می دهد. در آغاز بازی، آنا انتخاب می کند که چه کسی اولین حرکت را انجام دهد. سپس آن ها در نوبت حرکت خود، یکی از اعداد ۱ تا ۹ را می نویسند. اعداد نمی توانند تکرار شوند. فردی که نتیجه ی حرکاتش سه رقمی باشند که مجموع دو تا از آن ها برابر سومی است، می بازد. آنا چه کار کند تا بازی را ببرد؟
- ۷- در خودپردازی اسکناس های ۱۰۰، ۲۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ دلاری وجود دارند. الکس ۱۰۰۰۰ دلار در کارت بانکی اش دارد. الکس می خواهد مقداری پول نقد از خودپرداز بگیرد و سپس یک بلیط قطار از دستگاه فروش بلیط تهیه کند. الکس می داند که قیمت یک بلیط بر ۱۰۰ بخش پذیر است و از ۱۰۰۰۰ دلار بیش تر نیست. دستگاه فروش بلیط، پول خرد نمی دهد. آیا الکس می تواند از دستگاه خودپرداز و نه بیش تر از دو بار، پول بگیرد به طوری که مطمئن باشد می تواند یک بلیط را بدون پول خرد بخرد؟ (هنگام گرفتن پول از خودپرداز، الکس جمع کل مبلغ را می تواند انتخاب کند و نمی تواند اسکناس هایی را که خودپرداز به او خواهد داد، تعیین کند.)

**مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹ – پایه ی ششم ابتدایی**

- ۱- جیمز چند عدد یک رقمی که در میان آن ها، هیچ دو یا پنجی نبود را در هم ضرب کرد. آیا او می تواند عددی به دست آورده باشد که رقم هایش فقط دو و پنج باشند؟
- ۲- تعداد کاج های درخت صنوبری دو برابر تعداد کاج های درخت کاجی است. پیترو چند کاج کند و حالا تعداد کاج های درخت کاج سه برابر تعداد کاج های درخت صنوبر است. آیا پیترو می تواند به اندازه ی تعداد کاج هایی که کنده، از این درخت ها کاج بکند؟
- ۳- هابیت ها و وایکینگ ها در سرزمین عجایب زندگی می کنند. روزی ۲۷ ساکن این سرزمین، دور میز گردی نشستند به طوری که فاصله های بین موجودات کنار هم، برابر بودند. معلوم شد که بین هر دو هابیتی، حداقل دو وایکینگ نشسته اند. ثابت کنید سه وایکینگ هستند که از یکدیگر هم فاصله اند.
- ۴- اعداد ۱ تا ۴۹ در خانه های مربعی  $7 \times 7$  نوشته شده اند. تعداد اعداد فرد در هر دو ردیف، متفاوت هستند. آیا امکان دارد تعداد اعداد فرد در هر دو ستون نیز متفاوت باشند؟
- ۵- برای هر عدد چهار رقمی، می توان لیست تمامی تجدید آرایش های ممکن رقم هایش (شامل خود آن عدد) را به ترتیب صعودی نوشت. مثلاً برای عدد ۳۴۳۳، این لیست را خواهیم داشت: ۴۳۳۳، ۳۴۳۳، ۳۳۴۳، ۳۳۳۴. عددی را بدبخت می نامیم، هرگاه در جایگاه سیزدهم چنین لیستی ظاهر شود. چند عدد بدبخت وجود دارند؟
- ۶- در خودپردازی اسکناس های ۱۰۰، ۲۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ دلاری وجود دارند. الکس ۱۰۰۰۰ دلار در کارت بانکی اش دارد. الکس می خواهد مقداری پول نقد از خودپرداز بگیرد و سپس یک بلیط قطار از دستگاه فروش بلیط تهیه کند. الکس می داند که قیمت یک بلیط بر ۱۰۰ بخش پذیر است و از ۱۰۰۰۰ دلار بیش تر نیست. دستگاه فروش بلیط، پول خرد نمی دهد. آیا الکس می تواند از دستگاه خودپرداز و نه بیش تر از دو بار، پول بگیرد به طوری که مطمئن باشد می تواند یک بلیط را بدون پول خرد بخرد؟ (هنگام گرفتن پول از خودپرداز، الکس جمع کل مبلغ را می تواند انتخاب کند و نمی تواند اسکناس هایی را که خودپرداز به او خواهد داد، تعیین کند).
- ۷- آیا امکان دارد مربعی را به ۱۴۴ قسمت مساوی برش بزنیم به طوری که سه مربع مختلف (هر دو تای آن ها مختلف باشند) از تمامی آن قطعات ساخته شوند؟

**مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹ – پایه ی هفتم متوسطه**

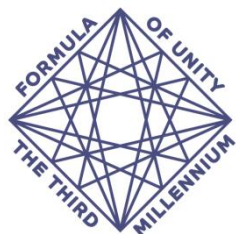
- ۱- پس از این که پسری اولین رقم (سمت چپ) عدد پنج رقمی بدون صفری را پاک کرد، آن عدد،  $n$  بار کوچک تر شد که در آن  $n$  عددی صحیح است. بعد از این که دوباره اولین رقم (سمت چپ) را پاک کرد، آن عدد  $m$  بار کوچک تر از عدد قبلی شد که در آن  $m$  نیز عددی صحیح است. سپس او این فرآیند را دو بار تکرار کرد و در هر گام، نتیجه ای به دست آورد که به اندازه ی عدد صحیحی بار کوچک تر از عدد قبلی اش بود. نمونه ای از چنین عدد پنج رقمی بیابید.
- ۲- هابیت ها و وایکینگ ها در سرزمین عجایب زندگی می کنند. روزی ۲۷ ساکن این سرزمین، دور میز گردی نشستند به طوری که فاصله های بین موجودات کنار هم، برابر بودند. معلوم شد که بین هر دو هابیتی، حداقل دو وایکینگ نشسته اند. ثابت کنید سه وایکینگ هستند که از یکدیگر هم فاصله اند.
- ۳- عددی را می توان به شکل مجموع ۸ عدد اول نوشت، اما نمی تواند به شکل مجموع ۸ عدد مرکب نوشته شود. آیا ممکن است این عدد را به شکل حاصل ضرب عددی اول و عددی مرکب نمایش داد؟
- ۴- اعداد ۱ تا ۴۹ در خانه های مربعی  $7 \times 7$  نوشته شده اند. تعداد اعداد فرد در هر دو ردیف، متفاوت هستند. آیا امکان دارد تعداد اعداد فرد در هر دو ستون نیز متفاوت باشند؟
- ۵- برای هر عدد چهار رقمی، می توان لیست تمامی تجدید آرایش های ممکن رقم هایش (شامل خود آن عدد) را به ترتیب صعودی نوشت. مثلاً برای عدد ۳۴۳۳، این لیست را خواهیم داشت: ۴۳۳۳، ۳۴۳۳، ۳۳۴۳، ۳۳۳۴. عددی را درخشان می نامیم، هرگاه در جایگاه پنجم چنین لیستی ظاهر شود. چند عدد درخشان وجود دارند؟
- ۶- سه گردآورنده ی نقاشی  $A$ ،  $B$  و  $C$  مشغول فروش برخی از نقاشی هایشان در یک حراج بودند.  $A$ ، ۳ درصد نقاشی هایش،  $B$ ، ۷ درصد و  $C$ ، ۲۰ درصد را فروخت. تمامی نقاشی های  $C - A$  تمامی نقاشی های  $B - A$  و  $A$  تمامی نقاشی های  $C$  را خرید. اگر تعداد نقاشی های هیچ یک از گردآورندگان تغییر نکرده باشد، کم ترین تعداد نقاشی هایی که می توانند در حراج فروخته شده باشند، چقدر است؟
- ۷- آیا امکان دارد مربعی را به ۱۴۴ قسمت مساوی برش بزنیم به طوری که سه مربع مختلف (هر دو تای آن ها مختلف باشند) از تمامی آن قطعات ساخته شوند؟

**مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹ – پایه ی هشتم متوسطه**

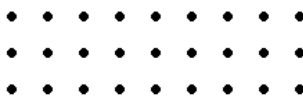
- ۱- پس از این که پسری اولین رقم (سمت چپ) عدد پنج رقمی بدون صفری را پاک کرد، آن عدد،  $n$  بار کوچک تر شد که در آن  $n$  عددی صحیح است. بعد از این که دوباره اولین رقم (سمت چپ) را پاک کرد، آن عدد  $m$  بار کوچک تر از عدد قبلی شد که در آن  $m$  نیز عددی صحیح است. سپس او این فرآیند را دو بار تکرار کرد و در هر گام، نتیجه ای به دست آورد که به اندازه ی عدد صحیحی بار کوچک تر از عدد قبلی اش بود. نمونه ای از چنین عدد پنج رقمی بیابید.
- ۲- هابیت ها و وایکینگ ها در سرزمین عجایب زندگی می کنند. روزی ۲۷ ساکن این سرزمین، دور میز گردی نشستند به طوری که فاصله های بین موجودات کنار هم، برابر بودند. معلوم شد که بین هر دو هابیتی، حداقل دو وایکینگ نشسته اند. ثابت کنید سه وایکینگ هستند که از یکدیگر هم فاصله اند.
- ۳- ۱۰۰ گوسفند در یک ردیف با فاصله ی ۶ متر از یکدیگر در حال دویدن هستند. سرعت آن ها ۵ کیلومتر در ساعت است. چوپان با سرعت ۱ کیلومتر در ساعت به سوی آن ها در حال قدم زدن است. هنگامی که گوسفندی به چوپان می رسد، فوراً دور می زند و در جهت مخالف با همان سرعت می دود. فاصله ی بین گوسفندها را که در جهت عکس می دوند، بیابید.
- ۴- سه گردآورنده ی نقاشی  $A$ ،  $B$  و  $C$  مشغول فروش برخی از نقاشی هایشان در یک حراج بودند.  $A$ ، ۳ درصد نقاشی هایش،  $B$ ، ۷ درصد و  $C$ ، ۲۰ درصد را فروخت.  $B$  تمامی نقاشی های  $C - A$  تمامی نقاشی های  $A - B$  و تمامی نقاشی های  $C$  را خرید. اگر تعداد نقاشی های هیچ یک از گردآوردگان تغییر نکرده باشد، کم ترین تعداد نقاشی هایی که می توانند در حراج فروخته شده باشند، چقدر است؟
- ۵- بر اضلاع  $AB$  و  $BC$  از مربع  $ABCD$ ، دو مثلث متساوی الاضلاع  $ABK$  و  $BCE$  بنا شده اند به طوری که  $K$  درون مربع، اما  $E$  بیرون آن است. ثابت کنید  $K$  بر پاره خط  $DE$  قرار می گیرد.
- ۶- آیا امکان دارد مربعی را به ۱۴۴ قسمت مساوی برش بزنیم به طوری که سه مربع مختلف (هر دو تای آن ها مختلف باشند) از تمامی آن قطعات ساخته شوند؟
- ۷-  $n$  بازیکن در تورنمنت تنیسی شرکت کردند (هر کدام ۱ بار با دیگران بازی کرد). کم ترین مقدار  $n$  که برای آن، قطعا ۴ بازیکن  $X$ ،  $Y$ ،  $Z$  و  $T$  باشند که  $X$  بر  $Y$ ،  $Z$  و  $T$  پیروز شده،  $Y$  بر  $Z$  و  $T$  پیروز شده و  $Z$  بر  $T$  پیروز شده باشد، چند است؟

**مسائل مرحله ی اول المیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹- یانه ی نهیم متوسطه**

- ۱- پس از این که پسری اولین رقم (سمت چپ) عدد پنج رقمی بدون صفری را پاک کرد، آن عدد،  $n$  بار کوچک تر شد که در آن  $n$  عددی صحیح است. بعد از این که دوباره اولین رقم (سمت چپ) را پاک کرد، آن عدد  $m$  بار کوچک تر از عدد قبلی شد که در آن  $m$  نیز عددی صحیح است. سپس او این فرآیند را دو بار تکرار کرد و در هر گام، نتیجه ای به دست آورد که به اندازه ی عدد صحیحی بار کوچک تر از عدد قبلی اش بود. نمونه ای از چنین عدد پنج رقمی بیابید.
- ۲- مارک دو چند جمله ای درجه ی ۲ با ریشه های صحیح مثبت یافت. سپس متوجه شد که حاصل جمع این دو چند جمله ای نیز یک چند جمله ای با ریشه های صحیح مثبت است. آیا ممکن است تمامی شش ریشه متفاوت باشند؟
- ۳- ۱۰۰ گوسفند در یک ردیف با فاصله ی ۶ متر از یکدیگر در حال دویدن هستند. سرعت آن ها ۵ کیلومتر در ساعت است. چوپان با سرعت ۱ کیلومتر در ساعت به سوی آن ها در حال قدم زدن است. هنگامی که گوسفندی به چوپان می رسد، فوراً دور می زند و در جهت مخالف با همان سرعت می دود. فاصله ی بین گوسفندها را که در جهت عکس می دوند، بیابید.
- ۴- بر اضلاع  $AB$  و  $BC$  از مربع  $ABCD$ ، دو مثلث متساوی الاضلاع  $ABK$  و  $BCE$  بنا شده اند به طوری که  $K$  درون مربع، اما  $E$  بیرون آن است. ثابت کنید  $K$  بر پاره خط  $DE$  قرار می گیرد.
- ۵- محبوبیت یک رقم عبارت است از تعداد اعداد دنباله ی  $۲, ۲, ۲, \dots, ۲, ۱, ۰$  که با آن رقم شروع می شوند (رقم سمت چپ). ثابت کنید دو رقم غیر صفر وجود دارند که محبوبیت یکی حداقل ۵ برابر محبوبیت دیگری است.
- ۶- در یک چهار ضلعی محدب، قطرهای بر هم عمودند. آیا طول های اضلاعش می توانند برابر چهار عدد صحیح متوالی باشند؟
- ۷-  $n$  بازیکن در تورنمنت تنیسی شرکت کردند (هر کدام ۱ بار با دیگران بازی کرد). کم ترین مقدار  $n$  که برای آن، قطعا ۴ بازیکن  $X, Y, Z$  و  $T$  باشند که  $X$  بر  $Y, Z$  و  $T$  پیروز شده،  $Y$  بر  $Z$  و  $T$  پیروز شده و  $T$  بر  $X$  پیروز شده باشد، چند است؟

**مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹- پایه ی دهم متوسطه**

- ۱- آیا سه چند جمله ای درجه ی ۲ مختلف وجود دارند که حاصل ضرب هر دو تای آن ها بر سومی بخش پذیر باشد؟
- ۲- اعداد ۱ تا ۴۹ در خانه های مربعی  $7 \times 7$  نوشته شده اند. تعداد اعداد فرد در هر دو ردیف، متفاوت هستند. آیا امکان دارد تعداد اعداد فرد در هر دو ستون نیز متفاوت باشند؟
- ۳- مجموعه ی تمامی نقاطی که عبارت زیر، بیش ترین مقدار ممکن را می گیرد، در دستگاه مختصات رسم کنید.
- $$(x^2 + y^2 - 4y + 3)^2 \left( 3 - \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} \right)$$
- ۴- محبوبیت یک رقم عبارت است از تعداد اعداد دنباله ی  $2, 2^1, 2^2, \dots, 2^{999999}$  که با آن رقم شروع می شوند (رقم سمت چپ). ثابت کنید دو رقم غیر صفر وجود دارند که محبوبیت یکی حداقل ۵ برابر محبوبیت دیگری است.
- ۵- شبکه ی مستطیلی  $m \times n$  ای داریم که تعداد کل نقاط شبکه بر ۳ بخش پذیر است (به عنوان مثال، شبکه ی  $3 \times 9$  که در شکل زیر نشان داده شده است). تمامی  $m$  و  $n$  هایی را بیابید که رسم  $\frac{mn}{3}$  مثلث غیر متقاطع (هیچ دو تایی از آن ها نقطه ی مشترک ندارند) که رئوس شان نقاط شبکه هستند، ممکن نباشد.

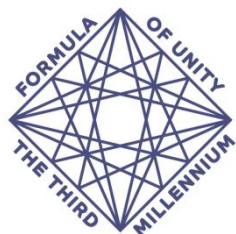


- ۶-  $AK$ ,  $BL$  و  $CM$  نیم سازه های زوایای مثلث  $ABC$  یکدیگر را در نقطه ی  $I$  قطع می کنند (نقاط  $K$ ,  $L$  و  $M$  بر اضلاع مثلث هستند). ثابت کنید:

$$\frac{IK}{IA} + \frac{IL}{IB} + \frac{IM}{IC} \geq \frac{3}{2}$$

- ۷- صد عدد داریم که در آغاز، هر یک از آن ها برابر ۰ است. در یک حرکت مجازیم ۹ عدد را انتخاب و از اولی شان یکی، دومی شان ۲ تا، سومی شان ۳ تا، ... و هشتمی شان ۸ تا کم کنیم، اما به نهمین عدد، ۹ تا بیافزاییم. بیش ترین تعداد اعدادی که با چنین حرکاتی می توانند مثبت شوند، چند است؟



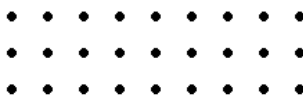
**مسائل مرحله ی اول المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹ – پایه ی یازدهم متوسطه**

۱- دو عدد مثبت بیابید هرگاه بدانیم مربع اولی ۱۶ بار بزرگ تر از مکعب دومی و مربع دومی ۲ بار کوچک تر از مکعب اولی باشد.

۲- اعداد ۱ تا ۴۹ در خانه های مربعی  $7 \times 7$  نوشته شده اند. تعداد اعداد فرد در هر دو ردیف، متفاوت هستند. آیا امکان دارد تعداد اعداد فرد در هر دو ستون نیز متفاوت باشند؟

۳- محبوبیت یک رقم عبارت است از تعداد اعداد دنباله ی  $2, 2^1, 2^2, \dots, 2^{999999}$  که با آن رقم شروع می شوند (رقم سمت چپ). ثابت کنید دو رقم غیر صفر وجود دارند که محبوبیت یکی حداقل ۵ برابر محبوبیت دیگری است.

۴- شبکه ی مستطیلی  $m \times n$  ای داریم که تعداد کل نقاط شبکه بر ۳ بخش پذیر است (به عنوان مثال، شبکه ی  $3 \times 9$  که در شکل زیر نشان داده شده است). تمامی  $m$  و  $n$  هایی را بیابید که رسم  $\frac{mn}{3}$  مثلث غیر متقاطع (هیچ دو تایی از آن ها نقطه ی مشترک ندارند) که رئوس شان نقاط شبکه هستند، ممکن نباشد.



۵-  $AK$ ,  $BL$  و  $CM$  نیم سازه های زوایای مثلث  $ABC$  یکدیگر را در نقطه ی  $I$  قطع می کنند (نقاط  $K$ ,  $L$  و  $M$  بر اضلاع مثلث هستند). ثابت کنید:

$$\frac{IK}{IA} + \frac{IL}{IB} + \frac{IM}{IC} \geq \frac{3}{2}$$

۶- صد عدد داریم که در آغاز، هر یک از آن ها برابر ۰ است. در یک حرکت مجازیم ۹ عدد را انتخاب و از اولی شان یکی، دومی شان ۲ تا، سومی شان ۳ تا، ... و هشتمی شان ۸ تا کم کنیم، اما به نهمین عدد، ۹ تا بیافزاییم. بیش ترین تعداد اعدادی که با چنین حرکاتی می توانند مثبت شوند، چند است؟

۷- مثالی از یک چند وجهی بیاورید که تصاویرش بر سه صفحه ی مختصات، یک مثلث منظم، یک چهار ضلعی منظم و یک شش ضلعی منظم باشند. مختصات هر راس چند وجهی را مشخص کنید، لیستی از یال ها و وجه هایش فراهم آورید.