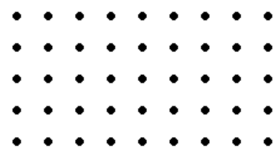
Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año escolar 2018–2019. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R5

1. Multiplicaron varios números de un dígito entre los cuales no había ni doses ni cincos. ¿Puede el producto ser un número que se escribe utilizando sólo las cifras 2 y 5?

2. Hay una retícula de 5×9 puntos (en la figura abajo). Trace 15 triángulos con los vértices en estos puntos de tal manera que los triángulos ni se intersequen ni se toquen.



3. Un árbol de manzanas verdes tenía dos veces más manzanas que un árbol de manzanas rojas. Juán derribó unas manzanas, y ahora hay tres veces más manzanas rojas que las verdes en los árboles. ¿Podrá Juán otra vez derribar de los árboles la misma cantidad de manzanas que ya derribó?

4. En el país de las maravillas viven los Hobbits y los Vikingos. Una vez 27 habitantes se sentaron en una mesa redonda a distancias iguales entre los vecinos. Resultó que entre cada pareja de hobbits se sentaron por lo menos dos vikingos. Demuestre que habían tres vikingos que se sentaron a distancias iguales uno de otro.

5. Los números de 1 al 49 están escritos en las casillas de un cuadrado de tamaño 7×7 cuadriculado de tal manera que las cantidades de números impares en cada fila son distintas. ¿Podrían las cantidades de números impares en cada columna también ser distintas?

6. Marco propone a Valeria el siguiente juego. Al inicio Valeria elige quien va primero, luego cada jugador en su turno escribe uno de los números de 1 al 9, sin repetir cualquier número. Si una jugada resulta en que algunos dos de los números escritos se suman a un tercer número escrito, el jugador pierde. ¿Cómo debe jugar Valeria para ganar?

7. Un cajero bancario dispone de billetes de 100, 200, 500, 1000, 2000 y 5000 rublos. Pedro tiene una tarjeta con 10000 rublos y quiere sacar una cantidad de dinero del cajero y después comprar un pasaje de tren en una taquilla automática. Se sabe que el precio del pasaje es un múltiplo de 100, no mayor a 10000 rublos. La taquilla automática no da cambio. Utilizando el cajero Pedro puede especificar la cantidad para sacar, pero no las denominaciones de billetes. ¿Puede Pedro comprar un pasaje utilizando el cajero máximo dos veces?

• Las fechas de la etapa preliminar: **de 15 de octubre hasta 12 de noviembre inclusive**. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa presencial que se llevará a cabo en enero/febrero de 2019.
• Recuerde que la mayoria de los problemas requiere una justificación completa de la respuesta.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Sólo en casos extraordinarios se aceptan trabajos en físico enviados por correo postal. Las instrucciones detalladas se encuentran en la página `formulo.org`.
• El trabajo no debe contener datos personales del participante. **No incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.** Los datos personales se envian en un formulario por separado.
• La participación en la Olimpiada es individual. Los trabajos sospechosos de ser copias o trabajo colectivo no serán calificados.

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año escolar 2018–2019. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R6

1. Multiplicaron varios números de un dígito entre los cuales no había ni doses ni cincos. ¿Puede el producto ser un número que se escribe utilizando sólo las cifras 2 y 5?

2. Un árbol de manzanas verdes tenía dos veces más manzanas que un árbol de manzanas rojas. Juán derribó unas manzanas, y ahora hay tres veces más manzanas rojas que las verdes en los árboles. ¿Podrá Juán otra vez derribar de los árboles la misma cantidad de manzanas que ya derribó?

3. En el país de las maravillas viven los Hobbits y los Vikingos. Una vez 27 habitantes se sentaron en una mesa redonda a distancias iguales entre los vecinos. Resultó que entre cada pareja de hobbits se sentaron por lo menos dos vikingos. Demuestre que habían tres vikingos que se sentaron a distancias iguales uno de otro.

4. Los números de 1 al 49 están escritos en las casillas de un cuadrado de tamaño 7×7 cuadriculado de tal manera que las cantidades de números impares en cada fila son distintas. ¿Podrían las cantidades de números impares en cada columna también ser distintas?

5. Para cada número de cuatro cifras distintas de cero se forma una lista de todas las permutaciones de sus cifras en orden ascendente. Por ejemplo, para el número 3433 tenemos la siguiente lista: 3334, 3343, 3433, 4333. El número se llama *desafortunado* si ocupa el decimotercer lugar en su lista. ¿Cuántos números desafortunados hay?

6. Un cajero bancario dispone de billetes de 100, 200, 500, 1000, 2000 y 5000 rublos. Pedro tiene una tarjeta con 10000 rublos y quiere sacar una cantidad de dinero del cajero y después comprar un pasaje de tren en una taquilla automática. Se sabe que el precio del pasaje es un múltiplo de 100, no mayor a 10000 rublos. La taquilla automática no da cambio. Utilizando el cajero Pedro puede especificar la cantidad para sacar, pero no las denominaciones de billetes. ¿Puede Pedro comprar un pasaje utilizando el cajero máximo dos veces?

7. ¿Podemos cortar un cuadrado en 144 partes iguales y después armar de todas estas partes tres cuadrados de tamaños distintos?

• Las fechas de la etapa preliminar: **de 15 de octubre hasta 12 de noviembre inclusive**. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa presencial que se llevará a cabo en enero/febrero de 2019.
• Recuerde que la mayoria de los problemas requiere una justificación completa de la respuesta.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Sólo en casos extraordinarios se aceptan trabajos en físico enviados por correo postal. Las instrucciones detalladas se encuentran en la página `formulo.org`.
• El trabajo no debe contener datos personales del participante. **No incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.** Los datos personales se envian en un formulario por separado.
• La participación en la Olimpiada es individual. Los trabajos sospechosos de ser copias o trabajo colectivo no serán calificados.

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año escolar 2018–2019. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R7

1. En un pizarrón está escrito un número de cinco cifras distintas de cero. Diego borró la primera cifra a la izquierda y observó que el número inicial era un múltiplo del número que le quedó. Diego borró otra vez la primera cifra y observó que el segundo número era un múltiplo del número que le quedó. Borró la primera cifra dos veces más y resultó que cada vez el número anterior era un múltiplo del que le quedaba. Proporcione un ejemplo del número inicial.

2. En el país de las maravillas viven los Hobbits y los Vikingos. Una vez 27 habitantes se sentaron en una mesa redonda a distancias iguales entre los vecinos. Resultó que entre cada pareja de hobbits se sentaron por lo menos dos vikingos. Demuestre que habían tres vikingos que se sentaron a distancias iguales uno de otro.

3. Un número se puede representar como la suma de ocho números primos distintos, pero no como la suma de ocho numeros compuestos distintos. ¿Podríamos representar este número como el producto de un número primo y un número compuesto?

4. Los números de 1 al 49 están escritos en las casillas de un cuadrado de tamaño 7×7 cuadriculado de tal manera que las cantidades de números impares en cada fila son distintas. ¿Podrían las cantidades de números impares en cada columna también ser distintas?

5. Para cada número de cuatro cifras distintas de cero se forma una lista de todas las permutaciones de sus cifras en orden ascendente. Por ejemplo, para el número 3433 tenemos la siguiente lista: 3334, 3343, 3433, 4333. El número se llama *excelente* si ocupa el quinto lugar en su lista. ¿Cuántos números excelentes hay?

6. Tres coleccionistas de arte A, B y C pusieron algunos de sus cuadros en subasta. A puso el 3% de sus cuadros, B puso el 7% de los suyos, y C puso el 20%. B compró todos los cuadros subastados por A, C compró todos los subastados por B, A compró los del C. Si al final de la subasta el total de cuadros de cada coleccionista no cambió, ¿cuál es el número mínimo (distinto de cero) de cuadros subastados?

7. ¿Podemos cortar un cuadrado en 144 partes iguales y después armar de todas estas partes tres cuadrados de tamaños distintos?

• Las fechas de la etapa preliminar: **de 15 de octubre hasta 12 de noviembre inclusive**. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa presencial que se llevará a cabo en enero/febrero de 2019.
• Recuerde que la mayoria de los problemas requiere una justificación completa de la respuesta.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Sólo en casos extraordinarios se aceptan trabajos en físico enviados por correo postal. Las instrucciones detalladas se encuentran en la página `formulo.org`.
• El trabajo no debe contener datos personales del participante. **No incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.** Los datos personales se envian en un formulario por separado.
• La participación en la Olimpiada es individual. Los trabajos sospechosos de ser copias o trabajo colectivo no serán calificados.

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año escolar 2018–2019. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R8

1. En un pizarrón está escrito un número de cinco cifras distintas de cero. Diego borró la primera cifra a la izquierda y observó que el número inicial era un múltiplo del número que le quedó. Diego borró otra vez la primera cifra y observó que el segundo número era un múltiplo del número que le quedó. Borró la primera cifra dos veces más y resultó que cada vez el número anterior era un múltiplo del que le quedaba. Proporcione un ejemplo del número inicial.

2. En el país de las maravillas viven los Hobbits y los Vikingos. Una vez 27 habitantes se sentaron en una mesa redonda a distancias iguales entre los vecinos. Resultó que entre cada pareja de hobbits se sentaron por lo menos dos vikingos. Demuestre que habían tres vikingos que se sentaron a distancias iguales uno de otro.

3. Cien borregos corren en una fila a distancia de 6 m uno detrás de otro y con una velocidad de 5km/h. Un pastor camina en el sentido contrario con una velocidad de 1 km/h. Al encontrarse con el pastor un borrego de inmediato empieza a correr en el sentido contrario con la misma velocidad. ¿Cuál es la distancia entre borregos en su movimiento contrario?

4. Tres coleccionistas de arte A, B y C pusieron algunos de sus cuadros en subasta. A puso el 3% de sus cuadros, B puso el 7% de los suyos, y C puso el 20%. B compró todos los cuadros subastados por A, C compró todos los subastados por B, A compró los del C. Si al final de la subasta el total de cuadros de cada coleccionista no cambió, ¿cuál es el número mínimo (distinto de cero) de cuadros subastados?

5. Utilizando los lados AB y BC del cuadrado $ABCD$ como bases, construyeron triángulos equiláteros ABK y BCE de tal manera que el punto K pertenece a la región interior del cuadrado, mientras el punto E pertenece a la región exterior. Demuestre que K pertenece al segmento DE.

6. ¿Podemos cortar un cuadrado en 144 partes iguales y después armar de todas estas partes tres cuadrados de tamaños distintos?

7. En un torneo de tenis participaron n jugadores y cada uno jugó un partido con todos los demás. ¿Para qué valor mínimo de n siempre habrá 4 jugadores X, Y, Z y T tales que X gana a Y, Z y T; Y gana a Z y T; Z gana a T?

• Las fechas de la etapa preliminar: **de 15 de octubre hasta 12 de noviembre inclusive**. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa presencial que se llevará a cabo en enero/febrero de 2019.
• Recuerde que la mayoria de los problemas requiere una justificación completa de la respuesta.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Sólo en casos extraordinarios se aceptan trabajos en físico enviados por correo postal. Las instrucciones detalladas se encuentran en la página `formulo.org`.
• El trabajo no debe contener datos personales del participante. **No incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.** Los datos personales se envian en un formulario por separado.
• La participación en la Olimpiada es individual. Los trabajos sospechosos de ser copias o trabajo colectivo no serán calificados.

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año escolar 2018–2019. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R9

1. En un pizarrón está escrito un número de cinco cifras distintas de cero. Diego borró la primera cifra a la izquierda y observó que el número inicial era un múltiplo del número que le quedó. Diego borró otra vez la primera cifra y observó que el segundo número era un múltiplo del número que le quedó. Borró la primera cifra dos veces más y resultó que cada vez el número anterior era un múltiplo del que le quedaba. Proporcione un ejemplo del número inicial.

2. Jorge construyó dos trinomios cuadrados con raíces naturales, luego sumó los trinomios, y encontró que las raices de la suma también son números naturales. ¿Pueden las seis raíces ser todas distintas?

3. Cien borregos corren en una fila a distancia de 6 m uno detrás de otro y con una velocidad de 5km/h. Un pastor camina en el sentido contrario con una velocidad de 1 km/h. Al encontrarse con el pastor un borrego de inmediato empieza a correr en el sentido contrario con la misma velocidad. ¿Cuál es la distancia entre borregos en su movimiento contrario?

4. Utilizando los lados AB y BC del cuadrado $ABCD$ como bases, construyeron triángulos equiláteros ABK y BCE de tal manera que el punto K pertenece a la región interior del cuadrado, mientras el punto E pertenece a la región exterior. Demuestre que K pertenece al segmento DE.

5. La *popularidad* de una cifra es la cantidad de los números del conjunto $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{999999}$ que inician con esta cifra a la izquierda. Demuestre que existen dos cifras tales que la popularidad de una de ellas es por lo menos 5 veces más grande que la popularidad de la otra.

6. Las diagonales de un cuadrilátero convexo son perpendiculares. ¿Pueden los lados del cuadrilátero tener medidas de cuatro números naturales consecutivos?

7. En un torneo de tenis participaron n jugadores y cada uno jugó un partido con todos los demás. ¿Para qué valor mínimo de n siempre habrá 4 jugadores X, Y, Z y T tales que X gana a Y, Z y T; Y gana a Z y T; Z gana a T?

• Las fechas de la etapa preliminar: **de 15 de octubre hasta 12 de noviembre inclusive**. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa presencial que se llevará a cabo en enero/febrero de 2019.
• Recuerde que la mayoria de los problemas requiere una justificación completa de la respuesta.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Sólo en casos extraordinarios se aceptan trabajos en físico enviados por correo postal. Las instrucciones detalladas se encuentran en la página `formulo.org`.
• El trabajo no debe contener datos personales del participante. **No incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.** Los datos personales se envian en un formulario por separado.
• La participación en la Olimpiada es individual. Los trabajos sospechosos de ser copias o trabajo colectivo no serán calificados.

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año escolar 2018–2019. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R10

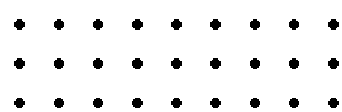
1. ¿Existen tres trinomios cuadrados distintos, tales que el producto de cualquier par de ellos se divide entre el tercero?

2. Los números de 1 al 49 están escritos en las casillas de un cuadrado de tamaño 7×7 cuadriculado de tal manera que las cantidades de números impares en cada fila son distintas. ¿Podrían las cantidades de números impares en cada columna también ser distintas?

3. Grafique en el plano cartesiano el conjunto de los puntos para los cuales la expresión
$$\left(x^2 + y^2 - 4y + 3\right)^2 \left(3 - \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y-3)^2}\,\right)$$
toma su valor máximo posible.

4. La *popularidad* de una cifra es la cantidad de los números del conjunto $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{999999}$ que inician con esta cifra a la izquierda. Demuestre que existen dos cifras tales que la popularidad de una de ellas es por lo menos 5 veces más grande que la popularidad de la otra.

5. Hay una retícula de $m \times n$ puntos; la cantidad total de los puntos es un múltiplo de 3 (por ejemplo, en la figura abajo se muestra una retícula de 3×9). ¿Para qué valores de m y n es imposible trazar $\frac{mn}{3}$ triángulos con los vértices en estos puntos de tal manera que los triángulos ni se intersequen ni se toquen.



6. En un triángulo ABC las bisectrices AK, BL, CM se cortan en el punto I. Demuestre que $\frac{IK}{IA} + \frac{IL}{IB} + \frac{IM}{IC} \geqslant \frac{3}{2}$.

7. Hay cien números, al inicio cada número es igual a cero. Un paso consiste en escoger 9 números y después restar 1 del primero, restar 2 del segundo, ..., restar 8 del octavo, pero sumar 9 al noveno. ¿Cuál es la cantidad máxima de números que podemos convertir en positivos utilizando pasos así?

• Las fechas de la etapa preliminar: **de 15 de octubre hasta 12 de noviembre inclusive**. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa presencial que se llevará a cabo en enero/febrero de 2019.
• Recuerde que la mayoria de los problemas requiere una justificación completa de la respuesta.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Sólo en casos extraordinarios se aceptan trabajos en físico enviados por correo postal. Las instrucciones detalladas se encuentran en la página `formulo.org`.
• El trabajo no debe contener datos personales del participante. **No incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.** Los datos personales se envian en un formulario por separado.
• La participación en la Olimpiada es individual. Los trabajos sospechosos de ser copias o trabajo colectivo no serán calificados.

Olimpiada matemática internacional
“Fórmula de la Unidad” / “El Tercer Milenio”
Año escolar 2018–2019. Etapa preliminar

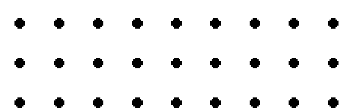
Problemas para el nivel R11

1. Encuentre dos números positivos tales que el cuadrado del primer número es 16 veces mayor que el cubo del segundo, y el cuadrado del segundo número es 2 veces menor que el cubo del primero.

2. Los números de 1 al 49 están escritos en las casillas de un cuadrado de tamaño 7×7 cuadriculado de tal manera que las cantidades de números impares en cada fila son distintas. ¿Podrían las cantidades de números impares en cada columna también ser distintas?

3. La *popularidad* de una cifra es la cantidad de los números del conjunto $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{999999}$ que inician con esta cifra a la izquierda. Demuestre que existen dos cifras tales que la popularidad de una de ellas es por lo menos 5 veces más grande que la popularidad de la otra.

4. Hay una retícula de $m \times n$ puntos; la cantidad total de los puntos es un múltiplo de 3 (por ejemplo, en la figura abajo se muestra una retícula de 3×9). ¿Para qué valores de m y n es imposible trazar $\frac{mn}{3}$ triángulos con los vértices en estos puntos de tal manera que los triángulos ni se intersequen ni se toquen.



5. En un triángulo ABC las bisectrices AK, BL, CM se cortan en el punto I. Demuestre que $\frac{IK}{IA} + \frac{IL}{IB} + \frac{IM}{IC} \geqslant \frac{3}{2}$.

6. Hay cien números, al inicio cada número es igual a cero. Un paso consiste en escoger 9 números y después restar 1 del primero, restar 2 del segundo, $\ldots$, restar 8 del octavo, pero sumar 9 al noveno. ¿Cuál es la cantidad máxima de números que podemos convertir en positivos utilizando pasos así?

7. Encuentre un ejemplo de un poliedro tal que sus proyecciones sobre los tres planos coordenados son: un triángulo regular, un cuadrilátero regular y un hexágono regular. Indique las coordenadas de cada vértice del poliedro, proporcione la lista de sus aristas y sus caras.

• Las fechas de la etapa preliminar: **de 15 de octubre hasta 12 de noviembre inclusive**. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa presencial que se llevará a cabo en enero/febrero de 2019.
• Recuerde que la mayoria de los problemas requiere una justificación completa de la respuesta.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Sólo en casos extraordinarios se aceptan trabajos en físico enviados por correo postal. Las instrucciones detalladas se encuentran en la página `formulo.org`.
• El trabajo no debe contener datos personales del participante. **No incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.** Los datos personales se envian en un formulario por separado.
• La participación en la Olimpiada es individual. Los trabajos sospechosos de ser copias o trabajo colectivo no serán calificados.