Задача № 2.

$M = 2^n + n^{2016}$ – простое число, $n \in N$

Начнем с того, что единственным четным простым числом является 2, но ее мы получить не можем, так как, если $n = 1$ (первое натуральное число), то $2^1 + 1^{2016} = 3$, значит $M \geq 3$. Заметим, что $n = 1$ – уд.

Поэтому, исходя из всего этого, понимаем, что n не может быть четным числом, т.к.

$n = 2k$: $2^{2k} \equiv 0 \pmod 2$

$(2k)^{2016} \equiv 0 \pmod 2$

$M \equiv 0 + 0 \equiv 0 \pmod 2$ – не уд.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда n – нечетное число. Оно может давать остатки $(-1; 0; 1)$ при делении на 3.

1) $n \vdots 3$, $n = 3k$:

$2^{3k} + (3k)^{2016} = 2^{3k} + (3k)^{672 \cdot 3}$ – сумма кубов

$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)((x-y)^2 + xy) = (2^k + (3k)^{672})(2^{2k} - 2^k (3k)^{672} + (3k)^{672 \cdot 2}) =$

$= (2^k + (3k)^{672})((2^k - (3k)^{672})^2 + (3k)^{672} \cdot 2^k)$

Чтобы это число было простым одна из скобок должна быть равна 1, а другая M.

$2^k + (3k)^{672}$ – не будет равна 1, т.к. $k \in N$, а значит, что это уже больше 1. Также и со второй скобкой: полный квадрат ≥ 0, а т.к. $(3k)^{672} \cdot 2^k > 1$, то это число тоже больше 1. Получаем вывод, что оно не может быть простым.

2) $n = 2k+1$, $n \equiv \pm 1 \pmod 3$.

$2^{2k+1} + (2k+1)^{2016} \equiv 2 + 1 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$. – не уд., т.к. кратно 3

$2^1 \equiv 2$
$2^2 \equiv 1$
$2^3 \equiv 2$
$2^4 \equiv 1$

заметим, что во всех нечетных степенях $2^k \equiv 2 \pmod 3$, где $k = 2m+1$

Ответ: число будет простым при $n = 1$.