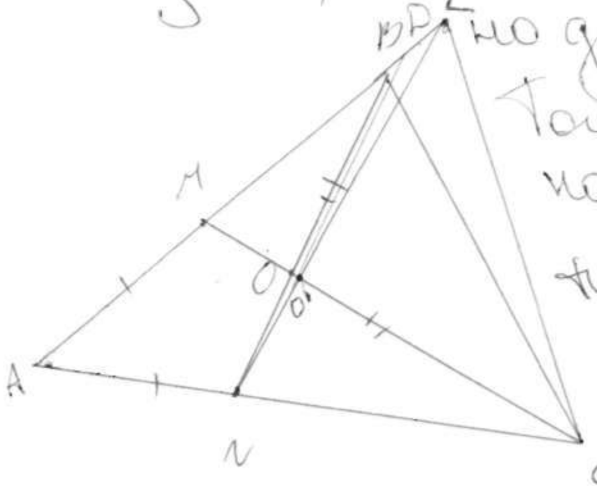
Задача №2.

Допустим, $\triangle ABC$ - не равнобедренный, то есть $AB \neq AC$, но данные условия выполняются. Тогда либо $AB < AC$ либо $AC < AB$, но случаи аналогичны. Допустим $AB < AC$. Тогда продлим AB за точку B так, чтобы



с AL было равно AC. Тогда $\triangle ALC$ - равнобедренный. Соединим LN. ~~Соединим~~ Обозначим точку пересечения LN и MC за точку O'. Пусть $OO' = y$, $O'C = x$. Тогда LO' тоже равно x, в силу симметрии равнобедренного треугольника относительно медианы. Тогда, т.к. $OC = OO' + O'C =$ $= x + y$, а $OB = OC$, то $OB = x + y$, причем $x + y > x$. Докажем, что OB не может быть меньше $O'L$. Пусть это так: тогда проведем $O'D$ параллельно OB. $\triangle MOB \sim \triangle O'DM$, причем с коэффициентом подобия, большим 1. Тогда $DO' > OB$. В треугольнике $O'DL$ $\angle O'DL = \angle OBL > 90°$, т.к. ~~...~~ $\angle B$ в треугольнике ABN $AB > AN \Rightarrow \angle ABN < \angle ANB \Rightarrow$ не может быть $\geq 90° \Rightarrow \angle NBD > 90°$, $\angle NBD = \angle O'DL$. Тогда в треугольнике $O'DL$ $\angle O'DL$ - наибольший, следовательно $O'L > O'D$, что по предположению неверно. Тогда из начального треугольника был равнобедренным (AB = AC) ЧТД

Задача № 3. Ответ: $27 \cdot 6^4 \cdot 5$. Т.к. в искомых числах ни одна цифра не делится на 3, то использовано 1, 2, 4, 5, 7, 8.
Рассмотрим, в скольких числах встречалась

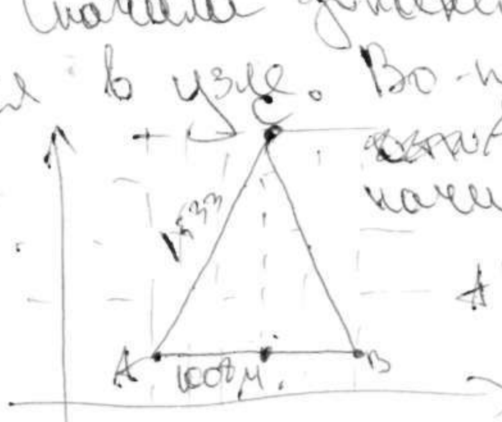
1, стоящая на первом месте. Поставим ее туда. Тогда у нас есть еще 6 вариантов (1, 2, 4, 5, 7, 8), которые можно поставить на 2-е, 3-е, 4-е, 5-е место. Т.е. есть всего в 6^4 числах. Аналогично, если она стоит на 2-м, 3-м, 4-м и 5-х местах. Тогда всего 1 используется в $6^4 \cdot 5$ числах. Аналогично с 2, 4, 5, 7, 8. Тогда вся сумма цифр –

$1 \cdot 6^4 \cdot 5 + 2 \cdot 6^4 \cdot 5 + 4 \cdot 6^4 \cdot 5 + 5 \cdot 6^4 \cdot 5 + 7 \cdot 6^4 \cdot 5 + 8 \cdot 6^4 \cdot 5 =$

$= 6^4 \cdot 5 (1+2+4+5+7+8) = 27 \cdot 6^4 \cdot 5$.

Задача № 4. Ответ: 1165270.

Сначала докажем, что третья вершина тоже находится в узле. Во-первых, она находится на серпере АВ, т.к. Δ - равнобедренный. Обозначим середину АВ за М. Тогда



AM = 1008, AC = 1533 => по теореме Пифагора MC = 1155. Так как длина АВ четна, то М находится в узле => т.к. MC - целое число, то С тоже в узле. Тогда посчитаем количество узлов на сторонах треугольника. На АВ, очевидно, 2017 узлов. Посчитаем, сколько узлов на АС. Уравнение прямой АС – $y = x \frac{1533}{1008} = \frac{73}{48}x$.

Тогда в узле будет каждое число, делящееся на 48. их будет 1008 : 48 + 1 (считаем еще 0) = = 22. Аналогично стальное узлов на СВ. Тогда всего узлов − 22 × 22 + 2017 − 3 (мы посчитали вершины по 2 раза) = 2058. Тогда посчитаем площадь треугольника АВС: $S_{ABC} = \frac{2016 \cdot 1155}{2} = 1164240$.

По формуле Пика площадь треугольника равна $\frac{M}{2} + N - 1$, где М − количество узлов на границах, а N − внутри треугольника. Отсюда 1164240 = $= \frac{2058}{2} + N - 1 = 1029 + N = > N = 1164241 - 1029 =$ $= 1163212$. Так как нам нужно общее количество, то $N + M = 1163212 + 2058 = 1165270$.

Задача № 1. Ответ: 12 = k

$\left(\frac{12}{2}\right)! \cdot \frac{12}{4} = 2016 \times 144 = 2160$. Докажем, что других чисел быть не может. ~~Пусть~~ Преобразуем выражение: $k \cdot \left(\frac{k}{2}\right)! - 4k^2 = 8064$. Так как n! определен только для целых неотрицательных чисел, то k − четное ($\frac{k}{2}$ − целое). Тогда следующее число хотя бы 14. Но $14 \cdot \left(\frac{14}{2}\right)! - 4 \cdot 14^2 = 8064$,

но $\left(\frac{14}{2}\right)! \cdot 14 - 4 \cdot 14^2 = 70560 - 4 \cdot 14 \cdot 14 = 70560 - 784 =$ $= 69776$, что больше 2016. Тогда следующее число

Сиаковская Людмила, 9

будет еще больше. Аналогично, если взять хотя бы 10 (первое число, меньшее 12 и четно), то $\left(\frac{10}{2}\right)! \cdot 10 - 400 < 8064$ если взять еще меньшее число, будет еще меньшее число. Это все верно, так как квадрат числа растет медленнее, чем факториал.