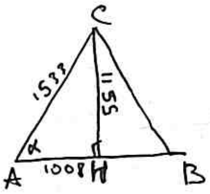
№4 ~~нал~~ Найдём высоту CH по т. Пифагора:



$CH=\sqrt{1533^2-\left(\frac{2016}{2}\right)^2}=\sqrt{1533^2-1008^2}=\sqrt{525\cdot 2541}=$

$=\sqrt{25\cdot 3\cdot 7\cdot 3\cdot 7\cdot 121}=5\cdot 3\cdot 7\cdot 11=1155$

Найдём S этого △:

$S=1155\cdot 1008=1164240$

По формуле Пика $S=\frac{M}{2}+N-1$,

где M – кол-во точек на границе △,

N – кол-во точек внутри △

посчитаем M. нужно найти M+N

Пусть у точки A координаты (0; 0)

тогда прямую AC можно задать формулой $y=kx$, где $k=tg\alpha$

$tg\alpha=\frac{1155}{1008}=\frac{55}{48}$

$y=\frac{55}{48}x$, чтобы x и y были целыми, нужно чтобы $x \vdots 48$

$1008 : 48 = 21$ ⇒ на ~~прямой~~ отрезке AC 21 ~~узлов~~ узел (не считая точку A)

$CB=AC$ ⇒ на отрезке BC 21 узел

тогда на AC и BC вместе $21+21-1=41$ (узел)

т.к. точку C мы посчитали 2 раза

на отрезке AB $2016+1=2017$ узлов.

$M=2017+41=2058$ узлов

$\frac{M}{2}=1029$

$M+N = S+\frac{M}{2}+1 = 1164241 + 1029 = 1165270$

Ответ: 1165270 узлов.

№1 Факториал определён для целых чисел ⇒ K/2 – целое ⇒

⇒ $K=2n$, где $n\in N$ ($n\neq 0$, т.к. тогда левая часть $=0$, а правая нет)

$n!\cdot 0{,}5n = 2016+4n^2$

$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n^2 = 8(504+n^2)$

левая часть $\vdots\, n^2$, $8n^2 \vdots\, n^2$ ⇒ $8\cdot 504 \vdots\, n^2$

числа

$8\cdot 504 = 9\cdot 8\cdot 8\cdot 7$

посмотрим делители этого числа

$n=2$ $\quad 2\cdot 1 \neq 2016+4\cdot 4$

$n=3$ $\quad 3\cdot 2\cdot 1{,}5 = 9 \neq 2016+4\cdot 9$

$n=4$ $\quad 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2 = 48 \neq 2016+4\cdot 16$

$\boxed{n=6}$ $\quad 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 3 = 10\cdot 36\cdot 6 = 2160 = 2016+4\cdot 36 = 2160$

Дальше факториалы растут значительно быстрее квадратов,

т.к. начиная с 4 $(n-1)! > n$

$n! > n^2$

значит решений больше не будет

при $n=6$ $k=12$

Ответ: $K=12$

N5

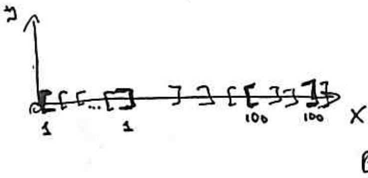
Т.к. прямоугольников конечное число, мы можем найти самый левый. Прямую, содержащую в его левую вертикальную сторону, обозначим за ось y, а горизонтальную прямую (любую) обозначим за ось x. Их пересечение – точка O.

Спроектируем все прямоугольники на луч Ox.

Если найдётся отрезок, пересекающийся со всеми остальными, то ему будет соответствовать прямоугольник, пересекающийся со всеми остальными.

Рассмотрим самый левый отрезок (у которого левый конец лежит в точке O) и самый правый отрезок (у которого левый конец дальше всех от точки O)

отрезки будем обозначать так $\underset{1}{[}$ $\underset{1}{]}$ (это значит левый и правый концы 1-го слева отрезка)



1(Если они пересеклись => все левые концы находятся внутри $\underset{1}{[}\underset{1}{]}$ => он пересекается со 100 □)

Внутри $\underset{1}{[}$ $\underset{1}{]}$ лежит ≥ 90 левых концов отрезков (по условию)

Внутри $\underset{100}{[}$ $\underset{100}{]}$ ~~лежит~~

У двух непересекающихся отрезков $\geq 90 \cdot 2 - (100 - 2) = 82$ общих отрезков (с которыми эти оба пересекаются)

Рассмотрим самого левого из них, (у которого левый конец ближе всего к O)

Заметим, что он пересекается со всеми кроме, может быть, тех, что лежат в $\underset{1}{[}$ $\underset{1}{]}$ полностью, и их левый конец левее левого конца рассмотренного отрезка.

Но их ≤ 18 и они могут пересекаться только между собой или с $\underset{1}{[}$ $\underset{1}{]}$, т.е. у каждого из них ≤ 18 пересечений, (а по условию ≥ 90) => они обязаны пересечься с рассмотренным прямоугольником, т.к. он самый левый. => он и будет искомым прямоугольником)

N3

~~По~~ Всего 6 допустимых цифр (1, 2, 4, 5, 7, 8) они встречаются одинаковое кол-во раз. Рассмотрим, сколько раз встречается цифра x.

Если в числе 5 цифр x, то таких чисел 1.

· Если в числе 4 цифры x, то таких чисел $5 \cdot 5 = 25$ (5 вариантов места, 5 вариантов цифр)

· Если в числе 3 ~~ц~~ цифры x, то таких чисел $10 \cdot (5 \cdot 5) = 250$ (10 вариантов выбрать места, 25 – поставить 2 цифры)

· Если в числе 2 цифры x, то таких чисел $10 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 1250$ (10 – места, 125 – цифры)

· Если 1 цифра x, то таких чисел $5 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 3125$ (5 – места, 625 – цифры)

Тогда всего ~~x~~ x встречается $1 \cdot 5 + 4 \cdot 25 + 3 \cdot 250 + 2 \cdot 1250 + 3125 =$

$= 100 + 750 + 2500 + 3130 = 6480$

И сумма всех встречающихся цифр:

$(1+2+4+5+7+8) \cdot 6480 = 27 \cdot 6480 =$

$$\begin{array}{r} \times\ 6480 \\ 27 \\ \hline +\ 45360 \\ 1296 \\ \hline 174960 \end{array}$$

Ответ: 174960.