

№1

Сразу заметим, что ни одна боковая клетка доски не может быть равновесной, так как у неё всего 3 соседа, следовательно, поровну белых и чёрных быть не может. Тогда равновесные клетки могут встречаться лишь среди оставшихся  $998 \times 998$  и среди чётных номеров. Покажем таблицу в синий и белый цвета следующим образом:

|      | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... | 994 | 995 | 996 | 997 | 998 | 999 | 1000 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1    | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 2    | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 3    | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 4    | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 5    | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 6    | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 7    | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| ...  | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 994  | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 995  | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 996  | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 997  | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 998  | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 999  | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |
| 1000 | б | б | б | б | б | б | б | ... | б   | б   | б   | б   | б   | б   | б    |

в первой строке покажем 1, 2, 4, 5, 7, 8, ..., 994, 995, 997, 998, 1000  
клетки.  
во второй 2, 3, 5, 6, 8, 9, ..., 995, 996, 998, 999  
клетки  
в третьей 3, 4, 6, 7, 9, 10, ..., 996, 997, 999, 1000.  
четвёртую - аналогично первой  
пятую - аналогично второй  
шестую - аналогично третьей.  
И так до конца таблицы.

Получаем, что в квадрате со 2 по 999 строку, с 2 по 999 столбец каждая чёрная клетка является равновесной.

Причём в каждой строке среди трёх идущих подряд клеток не менее двух равновесных.  $998 : 3 = 332$  (ост 2). В последних двух клетках всегда не менее одной равновесной. Итого в каждой строке не менее  $332 \cdot 2 + 1 = 665$  равновесных клеток, тогда всего их не менее  $665 \cdot 998 = 663670$  клеток, что больше, чем 600000. Получаем, что ответ - можно. Пример приведён выше.  
Ответ: можно.

№5.

Заметим, что сетов сложностью 0 не бывает, так как тогда все 3 числа должны быть одинаковыми, а они различны.

1). Рассмотрим сет сложности 1. В нём одна цифра в у всех трёх цифр одна цифра в каком-то разряде различается, а остальные 3 одинаковы. Вариантов выбора, какой именно разряд различается -  $C_4^1 = 4$ .

Пусть различен первый разряд. Тогда первое число мы можем выбрать  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$  способами, второе  $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$  способами, третье  $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$  способом. Всего  $81 \cdot 2 = 162$  способа. Но мы учли каждый способ 3! раз, ведь числа можно переставлять, а сет не изменится.



№5 (продолжение)

Тогда реальное число способов равно  $\frac{16 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 27$  способов.  
Но вспоминаем, что вариантов водора размыгающегося разряда было 4, то есть всего  $27 \cdot 4 = 108$  сетей сложности 1.

2). Рассмотрим сети сложности 2. Пусть у чисел сети размигаются первый и второй разряд. Тогда вариантов таких чисел будет  $\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = 27 \cdot 2 = 54$  ~~сетей~~ <sup>сетей</sup>.

А вариантов выбрать, какие именно разряды размигаются —  $C_2^4 = 6$  вариантов. Тогда всего  $54 \cdot 6 = 324$  сети сложности 2.

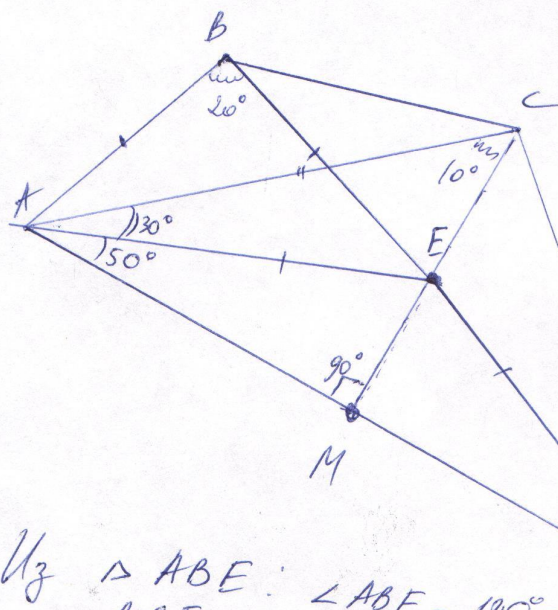
3). Аналогично первым двум случаям найдем, что сетей вида 3 будет  $\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot C_3^4}{3 \cdot 2} = 27 \cdot 4 \cdot 4 = 432$  <sup>сетей</sup> ~~сетей~~ <sup>сетей</sup> сложности 3.

4). Сетей сложности 4 будет  $\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot C_4^4}{3 \cdot 2} = 27 \cdot 8 = 216$  <sup>сетей</sup> ~~сетей~~ <sup>сетей</sup>.

Итого сетей сложности 1 будет 108, сетей сложности 2 — 324, сложности 3 — 432, сложности 4 — 216. Получаем, что больше всего сетей сложности 3.

Ответ: больше всего сложности 3.

№4.



$\triangle ACD$  — равнобедренный по признаку, ведь  $\angle CAD = \angle CDA$ , <sup>по теореме</sup>  $AC = CD$  по опред.

$\triangle AED$  — равнобедренный по признаку, ведь  $\angle EAD = \angle EDA$ , тогда  $AE = ED$  по <sup>опред.</sup>

Получаем, что точки C и E равноудалены от точек A и D, а пом. место всех таких точек — прямая CM, где M — середина AD, и CM — серединный перпендикуляр.

Из  $\triangle ACM$ :  $\angle ACM = 180^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$

Из  $\triangle ABE$ :  $\angle ABE = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$ . Рассмотрим углы ABE и ACE. Они лежат в одной плоскости от прямой AE, опираются на отрезок AE,  $AB = BE$  и  $\angle ABE = 2\angle ACE$ . Тогда можно описать окружность вокруг  $\triangle ACE$  с центром в точке B.



N 4 (продолжение)

$$\angle CAE = \angle CAD - \angle EAD = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

Тогда  $\angle EBC = 2\angle CAE = 60^\circ$ , ведь  $\angle CAE$  - вписанной, а  $\angle EBC$  - центральный.

$BC = BE$  как радиусы, тогда  $\triangle EBC$  - равнобедренный по определению.

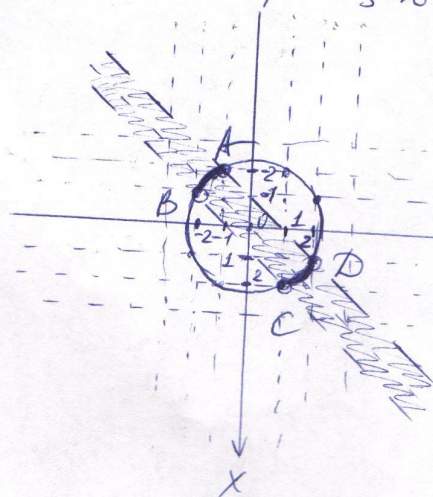
Отсюда  $\angle BEC = \angle BCE$  по свойству равнобедренного треугольника.

По теореме о сумме углов треугольника:  $\angle EBC + \angle BCE + \angle BEC = 180^\circ$ .

Отсюда  $\angle BEC = 120^\circ$ ,  $\angle BEC = \angle BCE = \angle EBC = 60^\circ$ . Тогда  $\triangle BEC$  - равносторонний по признаку, ч.т.д.

N 3.

Изобразим проекцию данной фигуры на плоскость XOY:



рассмотрим первые 2 условия.

1)  $x^2 + y^2 = 5$  - окружность, с центром в  $(0; 0)$  и радиусом  $\sqrt{5}$ .

$$2) |x - y| \leq 1$$

$$\begin{aligned} y &\leq x \\ |x - y| &= x - y \\ y &\leq x - 1 \end{aligned}$$

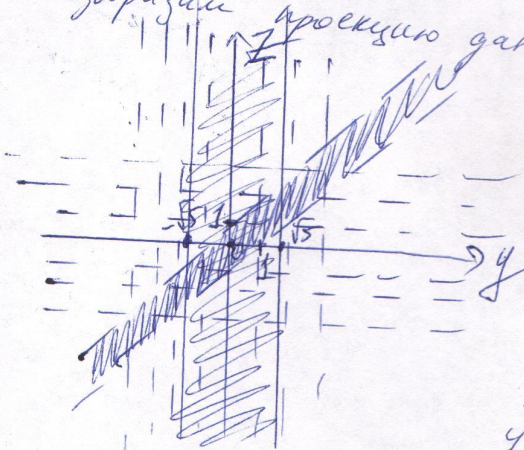
Множество точек между прямыми  $y = x$  и  $y = x - 1$

$$\begin{aligned} y &> x \\ |x - y| &= y - x \\ y &< x + 1 \end{aligned}$$

Множество точек между прямыми  $y = x$  и  $y = x + 1$

В итоге получаем две дуги,  $\widehat{BA}$  и  $\widehat{DC}$ , остальные элементы "выколоты" (знак строгий).

Изобразим проекцию данной фигуры на плоскость YOZ:



$$|y - z| \leq 1$$

$$\begin{aligned} y &\geq z \\ y - z &\leq 1 \\ z &\geq y - 1 \end{aligned}$$

Множество точек между прямыми  $y = z$  и  $z = y - 1$

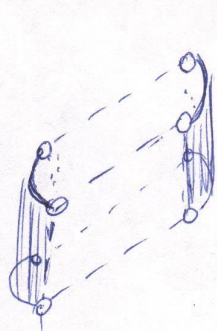
$$\begin{aligned} y &< z \\ z - y &\leq 1 \\ z &\leq y + 1 \end{aligned}$$

Множество точек между прямыми  $y = z$  и  $z = y + 1$

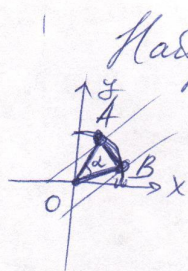
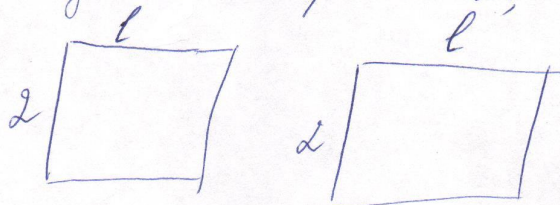


№3 (продолжение)

Тогда получаемая фигура будет в объёме выглядеть примерно так:

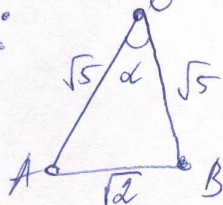


Тогда площадь, которую нам необходима, в развёртке получается равна двум прямоугольникам, где высота равна 2, а длина — длине отрезка  $AB$ .



Найдём длину твёрдой дуги. Угол, смотрящий на неё, равен  $\alpha$ .

$\triangle OAB$ :



$\triangle OAB$ :

$$2 = 5 + 5 - 2 \cdot 5 \cos \alpha$$

$$10 \cos \alpha = 8$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{10}$$

$$\alpha = \arccos \frac{8}{10}$$

Тогда искомая длина дуги равна  $\frac{\pi R \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{\sqrt{5} \cdot \pi \cdot \arccos \frac{8}{10}}{180^\circ}$

Отсюда площадь искомой фигуры равна  $2 \cdot \left( 2 \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot \pi \cdot \arccos \frac{8}{10}}{180^\circ} \right) =$

$$= \frac{4\sqrt{5}\pi \cdot \arccos \frac{8}{10}}{180^\circ}$$

Ответ:  $\frac{4\sqrt{5}\pi \cdot \arccos \frac{8}{10}}{180^\circ}$

№2.

Легко заметить, что  $n=1$  — подходит,  $2^1 + 1^{2016} = 2 + 1 = 3$  — простое число.

Также очевидно, что  $n$  не может быть чётным, иначе полученное число будет делиться на 2 и не будет простым.

Два в любой нечётной степени даёт остаток 2 при делении на 3, а  $n^{2016} = (n^{1008})^2$ , но квадраты могут давать только либо остаток 1, либо остаток 0 при делении на 3.

Если  $n^{2016} \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $2^n + n^{2016} \equiv 0 \pmod{3}$ , но если  $n$  не делится на 3, то сумма обязательно делится на 3. Единственное такое простое число — это 3, что и было получено ранее.



N2 (продолжение).

Тогда мы можем рассматривать только  $n$  вида  $3k$ .

$2^{3k} + (3k)^{2016} = 8^k + 3^{2016} \cdot k^{2016}$  - простое число. Очевидно,  $k$  снова не может быть четным, тогда  $k = 2a+1$

$$8^{2a+1} + 3^{2016} \cdot (2a+1)^{2016}$$

Но подобрать такое  $a$ , чтобы получаемое число было простым, невозможно. Тогда единственное подходящее  $n = 1$

Ответ:  $n = 1$