Задача №1.

$2, 4, 5, 25$

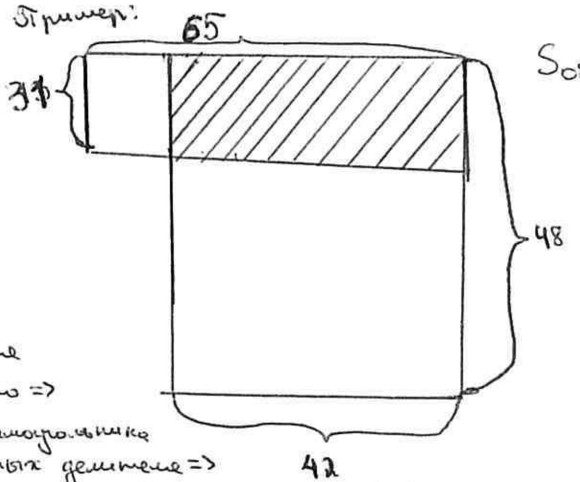
$2 \neq 4 \neq 5 \neq 25$

$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25 = 1000.$

Задача №2.

Ответ: ~~[illegible]~~ 1302 клетки

Пример:



$\times \begin{array}{r}31\\42\end{array}$ $= 62 + 124 = 1302$

$31 \times 42 = 1302$ клетки

$S_{общая} =$ ~~$13 \times 42 = 546$ клеток~~

Доказательство:

$2015 =$ ~~$13 \cdot 11 \cdot 5$~~ $31 \cdot 13 \cdot 5$

Заметим, что любые 2 простых делителя 2015 в произведении больше третьего =>

=> вертикальная сторона 1-ого прямоугольника не может включать в себя 2 простых делителя =>

=> может включать max 1 простой делитель => max 31.

Вертик. сторона ~~Высота~~ 2-ого прямоугольника точно больше 31 (Если max 30, то max $S_2 = 30 \times 29 < 900 < 2016$)

⇓

~~то есть~~ Вертикальная сторона общей части max 31.

~~Доказательство: $2015 = 13 \cdot 11 \cdot 5$ Т.к. высота< Т.к~~

3. $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

Докажем, что больше 42 ширина 2-ого прямоугольника быть не может.

$2016 = 42 \times 48$.

~~3 Вертик. сторона 2-ого прямоугольника не может быть меньше 48, иначе~~

Ширина не может быть ≥ 47 иначе min размеры 2-ого прямоугольника $47 \times 48 = 2162 > 2016$

Докажем, что ширина 2-ого прямоугольника не может принимать значений от 43 до 46, для этого я напишу каждое из этих чисел и какой-то их простой делитель, которого нет в 2016:

43 – 43
44 – 11
45 – 5
46 – 23.

И так, ширина 2-ого прямоугольника не может быть ≥ 47 и не может быть от 43 до 46 => ширина 2-ого прямоугольника не более 42.

4. Ширина 1-ого прямоугольника (min 65) то что больше ширины 2-ого прямоугольника (max 42) =>

=> max ширина общей части max 42.

⇓

(п.2+п.4) $S_{общей\ части}$ max 31×42.

(Пример выше).

Задача №4.

Ответ: 174960.

Подсчёт:

цифры, подходящие по условию – 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Теперь подсчитаем, в скольких числах цифра стоит на первом месте, на втором месте ... на третьем месте:

Возьмём цифру „1", если она стоит на первом месте – $6 \times 6 \times 6 \times 6$ раз (мы считаем кол-во вариантов расставить на 4 оставшихся места другие цифры).

Столько же цифра „1" будет стоять на втором, третьем, четвёртом и пятом месте

⇓

В сумме цифр цифра „1" будет встречаться $5 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6480$ раз.

Столько же раз будут учитываться цифры „2", „4", „5", „7", „8".

Т.е. сумма цифр $= (1+2+4+5+7+8) \times 6480 = 27 \times 6480 = 174960$.

$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 5 = 36 \times 36 \times 5 = 36 \times 180$

180×36: $108 + 54 = 6480$

6480×27: $4536 + 1296 = 174960$

ти уа

Ответ: от 0 до 9608. Задача №5.

Оценка: Рассмотрим крайние, но не угловые клетки – у них по 3 соседних клетки => они точно не равновесные. Их всего 98×4 = 392 т.е. max кол-во равновесных клеток: 10000 − 392 = 9608.

Алгоритм: Вначале покрасим всю доску в синий цвет. 0 равновесных клеток.

Далее ~~раск~~ перекрасим верхнюю правую клетку и клетку ~~на одну~~ ниже (I) в белый цвет. Стала 1 равновесная клетка. Теперь перекрасим весь правый столбец в белый цвет (II) → стало 2 равновесных клетки. Дальше раскрасим верхнюю и 3 справа клетку и клетку ниже в белый цвет (III) → стало 3 равновесных клетки.

Теперь делаем следующее: алгоритм

1. Верхнюю, 3 справа клетку перекрашиваем в синий цвет (стало на 1 меньше равновесных клеток)

2. Клетку, ниже самой нижней белой в 3 справа столбце перекрашиваем (IV) в белый цвет (стало на 2 больше равновесных клеток)

равновесных клеток +1

3. Верхнюю, 3 справа клетку перекрашиваем в белый цвет.

равновесных клеток +1

После 3 действия делаем алгоритм заново.

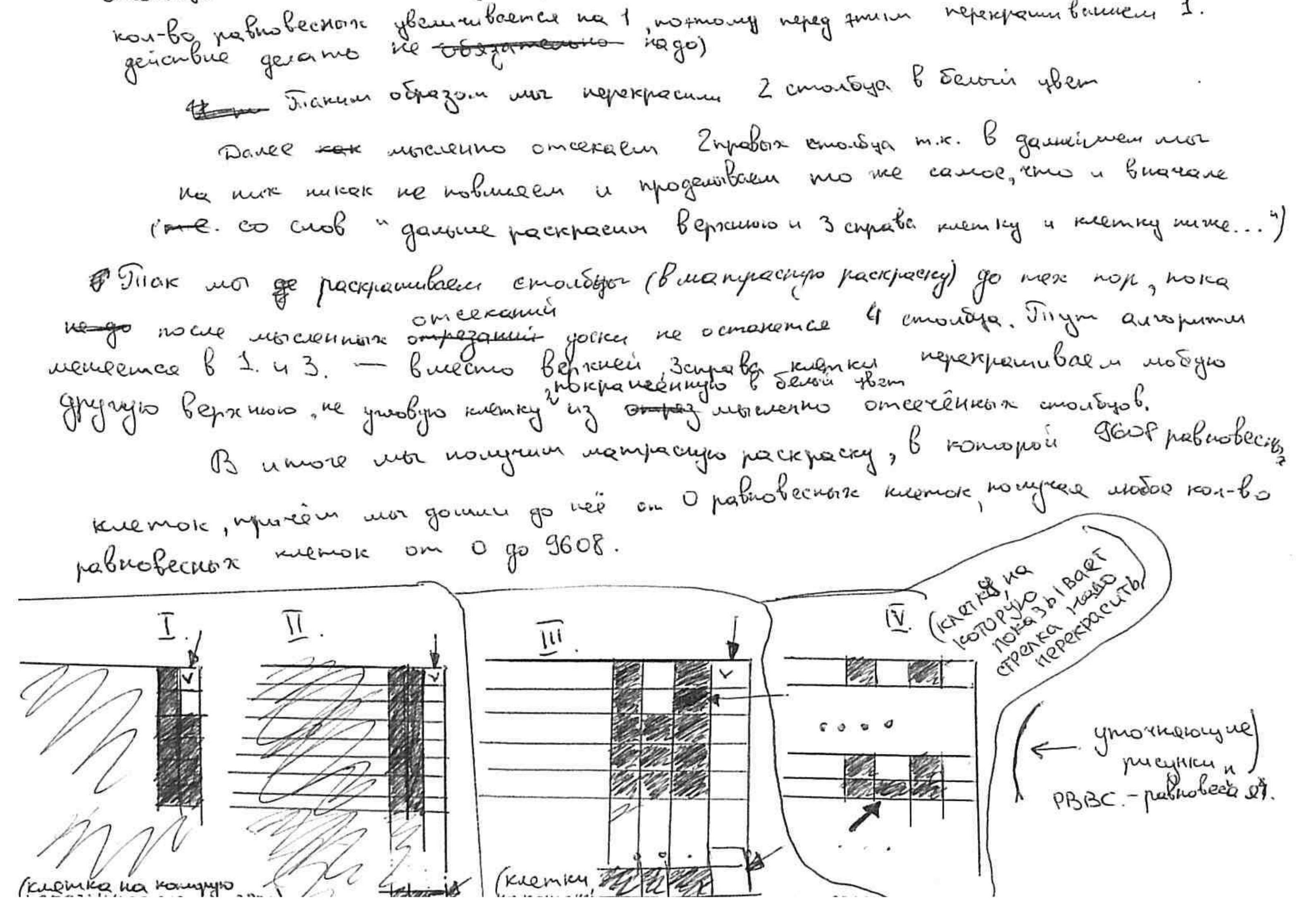
Заметим, что этот алгоритм действует до перекрашивания 2-ой снизу в 3-ем справа столбце включительно (когда перекрашиваем нижнюю в 3-ем справа столбце клетку кол-во равновесных увеличивается на 1, поэтому перед этим перекрашиванием 1. действие делать не ~~обязательно~~ надо)

Таким образом мы перекрасим 2 столбца в белый цвет.

Далее ~~как~~ мысленно отсекаем 2 правых столбца т.к. в дальнейшем мы на них никак не повлияем и проделываем то же самое, что и вначале (т.е. со слов "дальше раскрасим верхнюю и 3 справа клетку и клетку ниже...")

Так мы де раскрашиваем столбцы (в матрасную раскраску) до тех пор, пока ~~не до~~ после мысленных ~~отрезаний~~ отсеканий доски не останется 4 столбца. Тут алгоритм меняется в 1. и 3. — вместо верхней 3 справа клетки перекрашиваем любую другую верхнюю, не угловую клетку покрашенную в белый цвет из ~~отрез~~ мысленно отсечённых столбцов.

В итоге мы получим матрасную раскраску, в которой 9608 равновесных клеток, причём мы дошли до неё от 0 равновесных клеток, получая любое кол-во равновесных клеток от 0 до 9608.

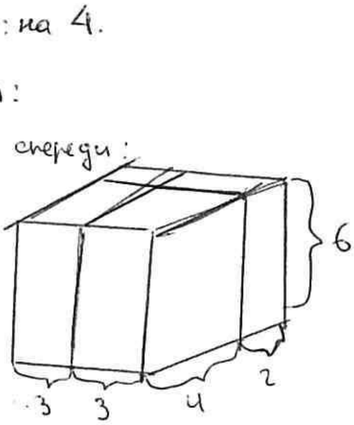


Задача №~.

Ответ: на 4.

Пример:

Вид спереди:



Кубик 6×6×6 делим на параллелепипеды

6×4×6 и 6×2×6

А их делим на параллелепипеды:

6×4×6 6×2×6

3×4×6 3×4×6 3×2×6 3×2×6

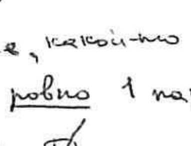
(Если нужны другие размеры кубика, то размеры параллелепипедов надо изменить в таком же отношении)

Доказательство:

У кубика 8 вершин

Допустим мы сможем разрезать на 3 или меньше параллелепипеда, тогда, по принципу Дирихле, какой-то из параллелепипедов будет занимать 3 вершины кубика (т.к. 1 вершину занимает ровно 1 параллелепипед)

~~Допустим он~~ ~~такой параллелепипед~~ занимает ~~вершину~~ 1.



~~Тогда он не может занимать вершину~~

Тогда заметим, что ~~совпадать~~ занимать вершину параллелепипед может только вершиной => если известно, что параллелепипед занимает какие-то 2 вершины, то

~~расстояние в высоту, ширину и~~

1. Если расстояние в высоту, ширину или длину не равно нулю, то высота, ширина и длина между этими ~~точками~~ вершинами равно высоте, ширине и длине параллелепипеда.
2. Если что-то одно (из высоты, ширины и длины) равно нулю, то два оставшихся размеры между этими вершинами равны двум оставшимся размерам у параллелепипеда.
3. Если ~~что~~ какие-то два размера (из высоты, ширины и длины) равны нулю, то оставшийся размер между точками равен соответствующему размеру у параллелепипеда.

⇓

Если между ~~точками~~ вершинами размер не равен нулю, то у параллелепипеда соответствующий размер равен.

Допустим такой параллелепипед занимает вершину 1, то ~~если~~ он не может занимать вершины 8, 5, 7, 3 иначе 2 или более размера будут соответствовать размерам между вершинами, т.е. будут равны (т.к. между вершинами куба размеры равны), а в типичном параллелепипеде размеры не могут быть равны. Тогда 2 ~~оставшиеся~~ вершины которые занимает параллелепипед — какие-то из 2, 4, 6. Но заметим, что какие-бы это ни были вершины, 2 размера между ~~точками~~ вершинами будут равны => 2 размера у параллелепипеда

противоречие