International mathematical Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"
2015/2016 year, 2nd round

Participant form

1. Surname(s), given name(s) Sebastián David Regalado Lozano.

2. Date of birth 07/08/99.

3. Country; city/town/village Guayaquil

4. School Liceo Cristiano de Guayaquil

5. Class 2do de Bachillerato

6. Surname and name of your teacher in mathematics Ronnie Acosta.

7. Do you attend a mathematical circle (extracurricular group)? If yes, please indicate the organization and your teacher Yes, Club de Matemáticas, Ronnie Acosta

8. Telephone (including country code) 042837856

9. E-mail sebastian_regalado07@hotmail.com

Problema # 2 SDRL.
Hoja # 1
R10

Primero veamos que ningun paralelepipedo puede contener a 3 vertices o mas vertices del cubo.

Ya que si los tres son de una misma cara del cubo, el paralelepipedo tendria 2 lados iguales. con lo que no seria tipico. ①

Si dos de ellos pertenecen a la diagonal de una cara entonces esa cara tambien pertenece al paralelepipedo con lo que habran 2 lados iguales. ②

Si dos de ellos pertenecen a la diagonal del cubo el paralelepipedo del que hablamos es el cubo mismo entonces no seria tipico ③

De lo que vemos en ①, ② y ③ si un paralelepipedo tipico contiene 3 o mas vertices del cubo entonces ocurre una contradicción ④

Por ④ cada paralelepipedo tipico contiene como mucho dos vertices del cubo. ⑤

Por ⑤ hay al menos 4 paralelepipedo para formar el cubo y podemos usar $K_1 = \left(\frac{K}{4}, \frac{K}{3}, K\right)$

$K_2 = \left(\frac{3}{4}K, \frac{K}{3}, K\right)$, $K_3 = \left(\frac{K}{4}, \frac{2}{3}K, K\right)$ y $K_4 = \left(\frac{3K}{4}, \frac{2}{3}K\right)$

Como 4 paralelepipedos donde $K_i = (a, b, c)$

Problema # 3 Sebastián Regalado.

Hoja # 1

R10

Si $n=0$

$\Rightarrow 2^n + n^{2016} = 2^0 + 0^{2016} = 1 + 0 = 1$

que no es primo $\Rightarrow n \geq 1$

Puesto que $n \geq 1$ 2^n es par.

Si $n = 2k$ $k \geq 1$ $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2^n + n^{2016} = 2^{2k} + (2k)^{2016} = 4^k + 2^{2016} \cdot k^{2016}$

$= 4^k + 4 \cdot 2^{2014} \cdot k^{2016} = 4(4^{k-1} + 2^{2014} \cdot k^{2016})$

lo cual es multiplo de 4 con lo que es imposible que sea ~~sea~~ primo.

$\Rightarrow n \neq 2k$ ósea n es impar. (1)

Si $n = 3k$ con $k \geq 1$ $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2^n + n^{2016} = 2^{3k} + (3k)^{2016} = (2^k)^3 + ((3k)^{672})^3$

$= \left[2^k + (3k)^{672}\right]\left[(2^k)^2 - (2^k)(3k)^{672} + ((3k)^{672})^2\right]$

$= \underbrace{\left[2^k + (3k)^{672}\right]}_{>1}\left[\underbrace{(2^k - (3k)^{672})^2}_{\geq 0} + \underbrace{2^k (3k)^{672}}_{>1}\right]$

Y como acabamos de factorizar $2^n + n^{2016}$ en dos factores claramente mayores a 1, $2^n + n^{2016}$ no es primo

$\Rightarrow n \neq 3k$ con $k \in \mathbb{N}$ ósea n no es multiplo de 3. (2)

Por (1) $2^n \equiv (-1)^n \equiv -1 \pmod 3$ (3)

Por ser n impar.

Problema #3 Sebastián Regalado
Hoja #2
R 10
Por ②

$n \equiv 1$ o $n \equiv -1 \pmod 3$

Ya que n no es multiplo de 3

En ambos casos $n^{2016} \equiv (+1)^{2016} \equiv 1 \pmod 3$

$n^{2016} \equiv (-1)^{2016} \equiv 1 \pmod 3$ ④

Por ser ~~n~~ 2016 par.

Por ③ y ④

$2^n + n^{2016} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow 3 \mid 2^n + n^{2016}$

Pero si $2^n + n^{2016}$ es primo eso solo ocurriría si

$2^n + n^{2016} = 3$.

Si $n \geq 2$ $2^n + n^{2016} \geq 2^2 + 2^{2016} > 3$

Lo cual contradice que $2^n + n^{2016} = 3$

entonces $n \leq 1$, y como ya vimos $n = 0$

solo nos falta ver $n = 1$

Si $n = 1$

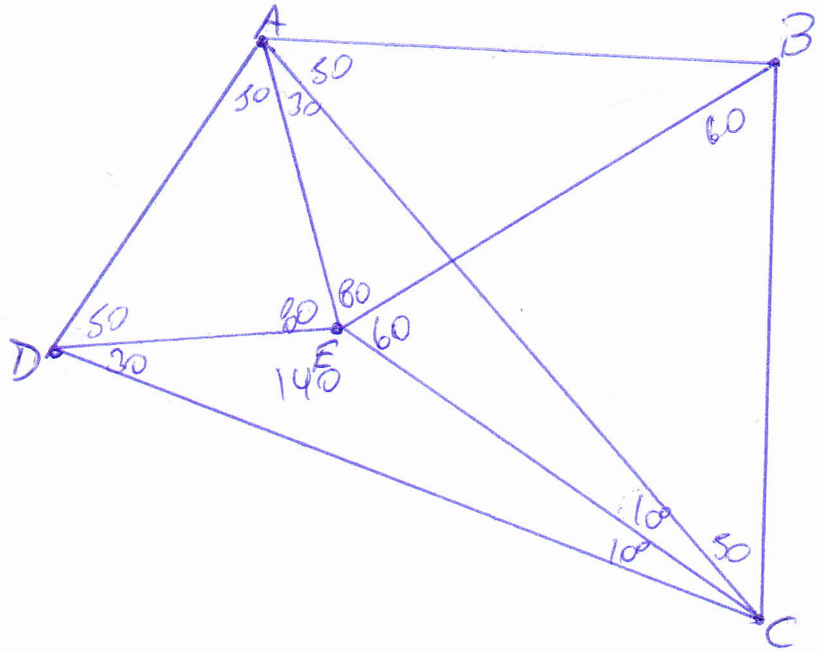
$2^n + n^{2016} = 2^1 + 1^{2016} = 2 + 1 = 3$.

Entonces $2^n + n^{2016}$ es primo solo cuando $\boxed{n = 1}$

Problema # 4 Sebastián Regalado.

Hoja # 1

R10



Puesto que $\measuredangle CDA = \measuredangle BEA = 80°$ y además

$\measuredangle CAD = \measuredangle BAE = 80°$ (por datos del problema)

$\Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle BEA$

$$\Rightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{AB}} \qquad (1)$$

Por otro lado $\measuredangle EAC = \measuredangle CAD - \measuredangle EAD = 80° - 50° = 30°$ (2)

~~Además el ángulo~~

Además $\measuredangle BAC = \measuredangle BAE - \measuredangle EAC = 80° - 30° = 50°$ (3)

Por (3) $\measuredangle EAD = \measuredangle BAC = 50°$ (4)

Por (1), (4) y el criterio proporción-ángulo-proporción

$\triangle DAE \sim \triangle CAB$

$\Rightarrow \measuredangle EDA = \measuredangle BCA = 50°$ (5)

Puesto que $\measuredangle EAD = \measuredangle EDA$ ∴ $\overline{EA} = \overline{ED}$ ¿ (6)

Problema # 4 SDRL

Hoja # 2

R 10

Por (6) la recta EC es la mediatriz del segmento $\overline{AD}$

Y como EC es la mediatriz del lado $\overline{AD}$ en el

triangulo isoceles $\triangle CDA$ donde el angulo en A y D

son los iguales También tenemos que la recta CE es la

bisectriz del angulo $\measuredangle DCA$. (7)

También tenemos que $\measuredangle DCA = 180 - \measuredangle CAD - \measuredangle CDA = 180° - 80° - 80° = 20°$ (8)

Por (7) y (8) $\measuredangle ECA = \measuredangle ECD = 10°$ (9)

Puesto que $\measuredangle CDE = \measuredangle CDA - \measuredangle EDA = 80° - 50° = 30°$ (10)

Por (9) y (10) $\measuredangle CED = 180 - \measuredangle CDE - \measuredangle ECD = 180 - 30 - 10 = 140°$ (11)

Por otro lado $\measuredangle AED = 180 - \measuredangle EDA - \measuredangle EAD = 180 - 50 - 50 = 80°$ (12)

Por otro lado $\measuredangle BEC = 360 - \measuredangle BEA - \measuredangle AED - \measuredangle CED$

$= 360 - 80 - 80 - 140$ (Por (10), (11), (12))

$\rightarrow \measuredangle BEC = 60°$ (13)

Por (5) y (9) $\measuredangle BCE = \measuredangle BCA + \measuredangle ECA = 50° + 10° = 60°$ (14)

Por (13) y (14) $\measuredangle EBC = 180 - \measuredangle BEC - \measuredangle BCE = 180 - 60 - 60 = 60$ (15)

Por (13), (14) y (15) el $\triangle BEC$ es equilatero

Problema # 5
Hoja # 1
SDRL

R10

Sea A el número de tripletas ORDENADAS que cumplen la propiedad de un "set" y además tienen complejidad 1.
Sea B el número de tripletas ORDENADAS que cumplen la propiedad de un "set" y además tienen complejidad 2.
Sea C el número de tripletas ORDENADAS que cumplen la propiedad de un "set" y además tienen complejidad 3.
Sea D el número de tripletas ORDENADAS que cumplen la propiedad de un "set" y además tienen complejidad 4.
Definimos a una "posición cambiante" como una posición en la que los tres números de un "set" tienen dígitos distintos.

También en A, B y C y D la manera de escoger el número es $3^4 = 3\cdot3\cdot3\cdot3$ ya que cada posición del número tiene 3 dígitos posibles "1", "2" o "3". (1)

Después de escoger el primer número de una tripleta en A hay que escoger la "posición cambiante" y a qué número cambiara el dígito de la posición cambiante del primer al segundo número de la tripleta y hay $\binom{4}{1}$ maneras de escoger la "posición cambiante" y 2 maneras de escoger a que dígito cambiara. (2)

Después de escoger los dos primeros números de una tripleta de A el hay un único tercer número que cumple con la condición de que sea un "set" ya que ese número

Problema #5 SD RL
Hoja #2
R10

→ Continuación.

que quede para la "porción cambiante". (3)

Por (1), (2) y (3)

$$A = 3^4 \cdot \binom{4}{1} \cdot 2 = 3^4 \cdot 8. \quad (4)$$

Analogamente a (3) una vez que escogemos los dos primeros números de una tripleta A, B, C o D hay un único número que podemos escoger como tercero. (5)

Despues de escoger el primer número de una tripleta en B hay que escoger las 2 "porciones cambiantes" y a que dígito cambiaran cada una de ellas del primer al segundo número de la tripleta y hay $\binom{4}{2}$ maneras de escoger las 2 "porciones cambiantes" y 2 maneras de escoger a que dígito cambiaran cada una. (6)

Por (1), (6) y (5) (7)

$$B = 3^4 \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 24.$$

Despues de escoger el primer número de una tripleta en C hay que escoger las 3 "porciones cambiantes" y a que dígito cambiaran cada una de ellas del primer al segundo número de la tripleta y hay $\binom{4}{3}$ maneras de escoger las 3 "porciones cambiantes" y 2 maneras de escoger a que dígito cambiaran cada una (8)

Por (1), (8) y (5) (9)

$$C = 3^4 \binom{4}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 32.$$

Problema #5 SDRL.

Hoja #3

R10

Despues de escoger el primer número de una Tripleta en D hay que escoger las 4 posiciones cambiantes y a que digito cambiaran cada uno de ellas del primer al segundo número de la Tripleta. y hay $\binom{4}{4}$ maneras de escoger las 4 "posiciones cambiantes" y 2 maneras de escoger a que digito cambiaran cada una. (10)

Por (1), (10) y (5)

$$D = 3^4 \binom{4}{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 16. \quad (11)$$

Sean A', B', C' y D' la cantidad de Tripletas que forman un "set" de complejidad 1, 2, 3, 4 respectivamente.

Es facil de notar que

$$A = 6A' \qquad B = 6B' \qquad C = 6C' \qquad D = 6D'$$

Ya que A, B, C y D tienen cada Tripleta de A', B', C', D' y sus maneras de permutarlas respectivamente y como cada Tripleta se puede permutar 3! maneras. (Ya que no hay Tripletas con numeros repetidos) se cumple lo anteriormente dicho.

$$\Rightarrow A' = \frac{A}{6} = \frac{3^4 \cdot 8}{6} = 3^3 \cdot 4$$

$$B' = \frac{B}{6} = \frac{3^4 \cdot 24}{6} = 3^3 \cdot 12. \rightarrow \text{Usando (4), (7), (9) y (11)}$$

$$C' = \frac{C}{6} = \frac{3^4 \cdot 32}{6} = 3^3 \cdot 16$$

$$D' = \frac{D}{6} = \frac{3^4 \cdot 16}{6} = 3^3 \cdot 8.$$

$$\Rightarrow C' > B' > D' > A' \quad (12)$$

Problema #5 SDRL.

Hoja #4

R 10

Por 12

~~Hay más sets~~.

La respuesta sería que los "sets" de complejidad 3 son más numerosos.