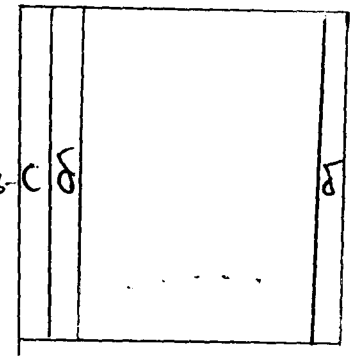
Задача 1.

Да, существуют: $A=9$, $B=6$, $C=1$.

$169=13^2$, $196=14^2$, $961=31^2$.

Задача 2.

Заметим, что клетки на сторонах — неравновесные, т.к. у них 3 — нечётное число — соседа. Значит, таких клеток $\leq 100^2-98\cdot 4=$ $=9708$. ~~Пример: все~~ Пример выглядит так:

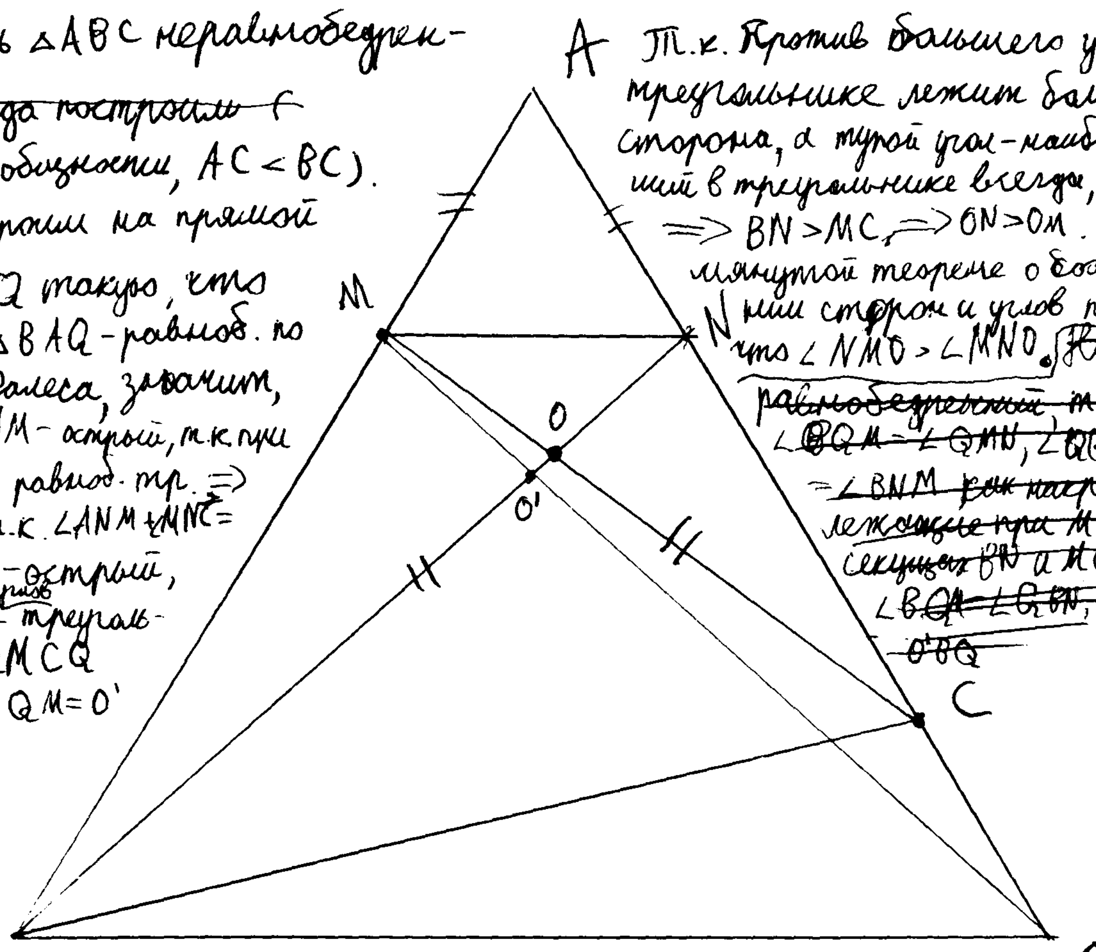


Клетки раскрашены по столбцам.

У всех клеток, кроме клеток на сторонах (у центральных и угловых) соседи с боков другого цвета, а сверху/снизу — своего.

Задача 3.

~~Зан~~ Пусть $\triangle ABC$ неравнобедренный ~~Тогда построим~~ (Не умаляя общности, $AC < BC$). Тогда построим на прямой AC точку Q такую, что $BQ \parallel MN$. $\triangle BAQ$ — равнобедр. по теореме Фалеса, значит, $QM = BN$. $\angle ANM$ — острый, т.к. при основании в равноб. тр. $\Rightarrow$ $\angle MNC$ — тупой, т.к. $\angle ANM + \angle MNC = 180^\circ$, $\angle MCN$ — острый, т.к. сумма углов треугольника 180° $\Rightarrow \angle MCQ$ тупой. $BN \cap QM = O'$



Т.к. Против большего угла в треугольнике лежит большая сторона, а тупой угол — наибольший в треугольнике всегда, $MQ > MC$, $\Rightarrow BN > MC$, $\Rightarrow ON > OM$. По упомянутой теореме о большими сторон и углов получим, что $\angle NMO > \angle MNO$. ~~Но $\triangle O'MN$ равнобедренный т.к. $\angle BQM = \angle QMN$, $\angle QBN = \angle BNM$ как накрест лежащие при $MN \parallel BQ$ и секущих BN и MQ, и $\angle BQA = \angle QBN$, т.к. $O'BQ$~~

$\triangle O'MN$ — равнобедренный, т.к. $BMNQ$ — равноб. трапеция, O' — точка пересечения диагоналей, MN — основание, O — на $O'N$, так что $\angle NMO$ — часть угла $NMO' = MNO \Rightarrow \angle NMO < \angle MNO$, но ранее было получено, что $\angle NMO > \angle MNO$! Противоречие. Значит, $AB = BC$, и тогда, как нетрудно убедиться, условие выполняется.

Задача 4

$S = a \cdot b$.

Поскольку прямоугольники клетчатые, ~~их~~ площадь общей части равна произведению меньшей стороны первого на меньшую второго. Меньшая сторона каждого $< \sqrt{2020} < \sqrt{2025} = 45$. Площадь делится на меньшую сторону, которая меньше 45. $44 \cdot 46 = 2024$, $44 \cdot 45 = 1980 \Rightarrow$ чисел $\vdots 44$ в диапазоне нет. $43 \cdot 47 = 2021$, $43 \cdot 46 = 1978$, т.е. для 43 – аналогично. А вот $2016 \vdots 42$, так что максимум каждого множителя – 42, а произведения – $42^2 = 1764$.

Задача 5

Поделим сеты на 4 типа:

1. Нет разрядов с совпадением
2. Есть 1 разряд с совпадением
3. 2 разряда с совпадением
4. 3 разряда с совпадением

~~Не~~ Очевидно, все разряды совпадать не могут.

Всего есть 3 способа выбрать ~~повторяющийся~~ разряд с совпадением (1, 2 или 3) и $3! = 6$ (число перестановок ~~чисел~~ цифр 1, 2, 3) – разряд без совпадений. Значит, всего способов:

$$\underset{(1)\text{ тип}}{6^4} + \underset{(2)\text{ тип}}{6^3 \cdot 3} + \underset{(3)\text{ тип}}{6^2 \cdot 9} + \underset{(4)\text{ тип}}{6 \cdot 27}.$$

Но каждый сет мы посчитали $3! = 6$ раз (количество перестановок чисел сета), так что итоговое число сетов $= 6^3 + 6^2 \cdot 3 + 6 \cdot 9 + 27 = 27 \cdot (1+2+4+8) = 81 \cdot 5 = 405$.