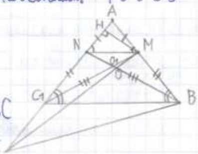
№ 1 $31^2 = 961$ $13^2 = 169$ $14^2 = 196$

Ответ: $A = 9$, $B = 6$, $C = 1$.

№ 2 Заметим, что все клетки на краю доски кроме угловых имеют 3 соседние клетки, - они не могут быть равновесными. Покрасим все чётные столбцы в синий, а нечётные в белый. Тогда у угловых клеток будет 1 белая и 1 синяя, а у центральных 98×98 будет 2 белых и 2 синих. Соседние по вертикали у каждой клетки будут её-же цвета а по горизонтали противоположного. Тогда все $98^2 + 4$ клеток кроме боковых будут равновесными. $10000 - 98 \cdot 4 = 9608$

Ответ: 9608 клеток.



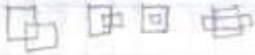
№ 3 Предположим, что треугольник ABC не равнобедренный. Пусть $AC > AB$.

Тогда отметим C_1, $AB = AC_1$. Проведём C_1M и назовём O_1 пересечение NB и C_1M. $NA = AM \to \angle ANM = \angle AMN \to \angle NMM = \angle MNC_1$. $AN = AM \to NC_1 = MB$. $AC_1 = AB \to \angle AC_1B = \angle ABC_1$.

$NC_1 = MB$, NM общая, $\angle C_1NM = \angle NMB \to \triangle C_1NM = \triangle BMN \to \angle O_1C_1B = \angle O_1BC_1$.

$\angle O_1C_1B = \angle O_1BC_1 \to C_1O_1 = O_1B$. $\angle AC_1B = \angle ABC_1 \to \angle AC_1B < 90^\circ$.

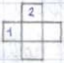
Проведем перпендикуляр MH на AC. Рассмотрим прямоугольные треугольники MHC и MHC_1. Катет MH общий, катет $HC > HC_1$, значит гипотенуза $MC > MC_1$. Заметим, что $OM < O_1O + O_1M$. $CO = OB$ по условию. Тогда: $CO = OB = O_1B - O_1O = C_1O_1 - O_1O$, $CO = C_1O_1 - O_1O$,
$OM < O_1O + O_1M \to CO + OM < C_1O_1 - O_1O + O_1O + O_1M$,
$CO + OM < C_1O_1 + O_1M$, $CO + OM = CM$, $C_1O_1 + O_1M = C_1M$,
$CM < C_1M$. Но $MC > MC_1$ – противоречие, значит $AC = AB$, значит ABC равносторонний.



№ 4 Заметим, что стороны этих прямоугольников параллельны, – их пересечение прямоугольник. Заметим, что высота этого прямоугольника не может быть больше наименьшей высоты из 2 прямоугольников, горизонтальная – наименьшей горизонтальной. Предположим, что наименьшая сторона одного из прямоугольников > 45. Тогда вторая > 46, и их произведение больше 2020.
Если она $= 44$, то вторая > 45, если 45, то произведение 1980 или больше, если 46, то 2024 или больше. Если меньшая $= 43$, то большая если ≤ 46, то произведение

1978 или меньше, если 47 или больше, то 2021 или больше. Если меньшая $= 42$, то большая ≥ 43, если большая ≤ 47, то произведение 1974 или меньше, если ≥ 49, то 2058 или больше, если 48, то 2016 - подходит. Значит наименьшая сторона не больше 42, значит стороны пересечения не больше 42, а площадь не больше 1764. Если стороны первого 42 и 48, а второго 48 и 42, пересекаются они так, то площадь пересечения

$42 \cdot 42 = 1764.$



Ответ: 1764 клеточки.

№5 Рассмотрим первую цифру чисел в сете. Это либо все 1, либо все 2, либо все 3, либо 1, 2 и 3 шестью способами перестановок, — всего 9 способов. Заметим, что остальные цифры можно выбрать такими же способами. Всего способов выбрать сет 9^4. Если в каком-то сете есть 2 одинаковых числа, то на всех 4 местах цифры совпадают. Значит на всех местах стоят одинаковые цифры - таких сетов 3^4. Во всех оставшихся сетах комбинации получившиеся перестановкой чисел в сете считались различными, - разделим на количество таких перестановок - 6.

$(9^4 - 3^4) : 6 = 1080$

Ответ: 1080 сетов.