

$2^n + n^{2016}$ — простое число при каких n ?

Проверим $n=1$: $2^1 + 1^{2016} = 3$ — ур. условию

Пусть $n \equiv 1 \pmod{3}$, тогда

$$2 \equiv -1 \pmod{3}$$

$$n^{2016} \equiv -1^{2016} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2^n + n^{2016} \equiv -1 + 1 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$$

Пусть $n \equiv -1 \pmod{3}$, тогда

$$2 \equiv -1 \pmod{3}$$

$$n^{2016} \equiv -1^{2016} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2^n + n^{2016} \equiv 0 \pmod{3}$$

Получаем: $n \div 3$; $n = 3k$

$$2^{3k} + (n^{672})^3 = (2^k + n^{672})(2^{2k} - 2^k n^{672} + n^{1344}) \quad (1)$$

Условие где простого числа где (1)

$$\nexists (2^k + n^{672}) = 1; \quad (2^{2k} - 2^k n^{672} + n^{1344}) - \text{простое}$$

т.к. $k, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (2^k + n^{672})$ — число составное, четное
 $2^k \in \mathbb{N}, > 0$
 $n^{672} \in \mathbb{N}, > 0$

Осталось рассмотреть $(2^{2k} - 2^k n^{672} + n^{1344})$ является ли простым.

$$\text{Введем замену: } \begin{cases} 2^k = a \\ n^{672} = b \end{cases} \Rightarrow (a^2 - ab + b^2)$$

$$(a^2 - ab + b^2) = (a-b)^2 + ab$$

\Downarrow

$(a-b)^2$ не может быть простым
 ab также не может быть простым, т.к.

$$2^k \in \mathbb{N}, n^{672} \in \mathbb{N} \Rightarrow ab \in \mathbb{N}$$

Следовательно выражение $2^n + n^{2016}$ является простым
 лишь при $n=1$

Ответ: $n=1$