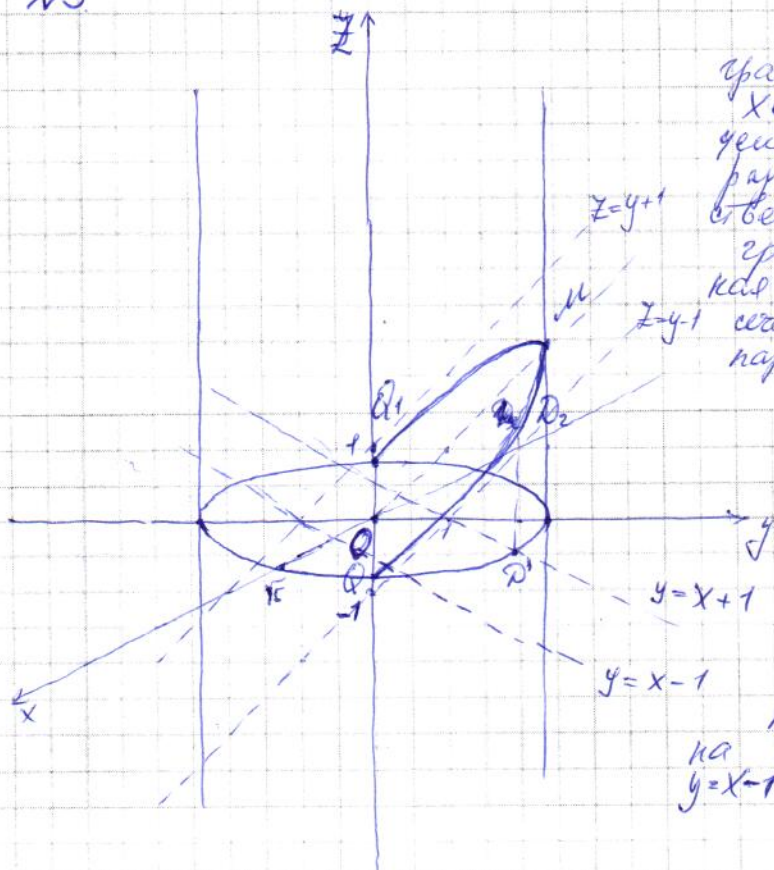


N3



у $x^2 + y^2 = 5$.
 графиком уравнения в плоскости xOy является окружность с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом, равным $\sqrt{5}$. В пространственной системе координат графиком является цилиндрическая поверхность перпендикулярная плоскости xOy , сечение которой является окружностью, параллельной плоскости xOy .

$$\begin{aligned} |x-y| &< 1 \\ -1 &< x-y < 1 \\ -x-1 &< -y < -x+1 \\ x-1 &< y < x+1 \end{aligned}$$

графиком неравенства $x-1 < y < x+1$ в пространственной системе координат является часть пространства, ограниченная плоскостями, проекции которых на плоскость xOy являются прямые $y=x-1$ и $y=x+1$.

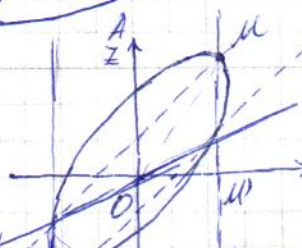
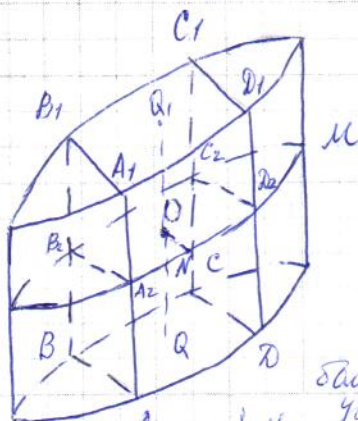
$$\begin{aligned} |y-z| &< 1 \\ -1 &< y-z < 1 \\ -y-1 &< -z < -y+1 \\ y-1 &< z < y+1 \end{aligned}$$

графиком неравенства $y-1 < z < y+1$ в пространственной системе координат является часть пространства, заключенная между двумя параллельными плоскостями, параллельными плоскости xOy , проекции которых на плоскость zOy являются прямые $z=y+1$ и $z=y-1$.

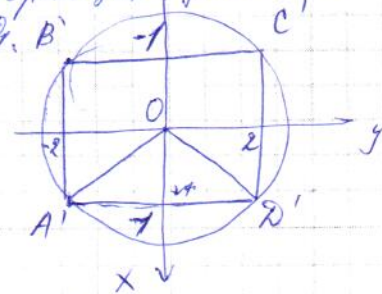
Т.к. угловые коэффициенты прямых равны 1, то плоскости образуют угол 45° с плоскостью xOy . Сечения цилиндрической поверхности этими плоскостями — эллипсы, большие полуоси которых расположены на прямых $z=y+1$ и $z=y-1$.

Рассмотрим эллипс, лежащий в плоскости, параллельной плоскости xOy , проходящей thru OM — большой полуоси. OM' — проекция большой полуоси на Oy . Угловой коэффициент прямой $z=y$ (в системе zOy) равен 1. Рассмотрим эллипс, лежащий внутри плоскости, параллельной плоскости xOy , всего эллипс $OM = OM' \cdot \sqrt{2}$.

Множество точек, удовлетворяющих условию y задачи — фигура, изображенная на рисунке.



D' — проекция D на (xOy) , A' — проекция A на (xOy)
 $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$
 $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 + 5 = 0 \\ (x+2)(x-1) = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$



$D'(1, 2, 0)$
 $C'(-1, 2, 0)$; $C'D, D'C$ — прямоугольник.

закрасив посильную тройку так же, получим еще столько же сбалансированных, всего во втором ряду $664+1=665$ сбалансированных

3 ряд. $\boxed{888} \boxed{888} \dots \boxed{888} \boxed{8}$

Рассмотрим группы по 3 клетки в каждой группе по 2 удовлетворяющих условию сбалансированных, $2 \cdot \frac{1000-1}{3} = 333 \cdot 2 = 666$

~~4~~ 4 ряд. $\boxed{888} \boxed{888} \dots \boxed{888} \boxed{888}$

Аналогично, $\frac{1000-1-3}{3} \cdot 2 + 1 = 665$ сбалансированных.

Начиная с 5-го ряда повторил раскраску канторов рекурсивно с номером $(3n-1)$ раскрасил аналогично второму столбцу с номером $3n$ аналогично третьему, с номером $(3n+1)$ аналогично четвертому $1 \leq n \leq 333$, $n \in \mathbb{N}$. Предпоследний ряд 999 раскрашен аналогично третьему.

Рядов с раскраской второго ряда $3n-1 \leq 999$
 $3n \leq 1000$
 $n \leq 333 \frac{1}{3}$

С раскрасками третьего 333, с раскрасками четвертого, в которых есть сбалансированные клетки $3n+1 \leq 999$
 $n \leq 332 \frac{2}{3}$, $n = 332$

Количество сбалансированных сбалансированных клеток в этих рядах

$$333 \cdot 665 + 333 \cdot 666 + 332 \cdot 665 = 333(665 + 666) + 332 \cdot 665 =$$

$$= 443223 + 220780 = 664003$$

При данной раскраске можно получить еще 3 клетки, удовлетворяющие условию - клетки в углах

Таким образом на доске более 664000 сбалансированных клеток.

Ответ: можно.

№ 2 $2^n + n^{2016}$, $n \in \mathbb{N}$.
 При $n=1$ $2^1 + 1^{2016} = 3$ - простое число

Если n - четное, то оба слагаемых делится на 2, оба слагаемых отличные от 2, значит искомого сбалансированного от 2, т.е. число составное.

Если n - нечетное, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$2^n + n^{2016} = 2^{2k+1} + (2k+1)^{2016} = 2^{2k+1} + (2k+1)^{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7}$$

число $n = 2k+1$ в разложении на простые множители содержит 3 и 7, то можно воспользоваться формулой m -х степеней: $a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - ba^{m-2} + \dots + b^{m-1})$. В итоге получим произведение двух чисел, отличных от чисел 1 и 2, т.е. составное

число.

Пусть $2k+1=3l$ Тогда $2^{2k+1} + (2k+1)^{2016} = 2^{3l} + (3l)^{2016} =$
 $= (2^l + (3l)^{2016/3}) (2^{2l} - 2^l (3l)^{2016/3} + ((3l)^{2016/3})^2)$ — число составное

Рассмотрим сумму $2^{2k+1} + (2k+1)^{2016}$ при $2k+1 \neq 3l$
 $2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k} = 2(4^k - 1 + 1) = 2(4^k - 1) + 2.$

$4^k - 1 = (4-1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + \dots + 4 + 1) = 3(4^{k-1} + 4^{k-2} + \dots + 4 + 1)$
 Выражение делится на 3, значит $(2(4^k - 1) + 2)$ даёт остаток 2 при делении на 3.

$(2k+1)^{2016} = ((2k+1)^{1008})^2$

Пусть $(2k+1)^{1008} = t$, ~~в зависимости~~ Т.к $2k+1 \neq 3l$,
 то $t = 3p + z$, где $z = 1$ или $z = 2$.

$t^2 = (3p+z)^2 = 3(3p^2 + 2pz) + z^2$

Если $z=1$, то $z^2=1$, t^2 при делении на 3 даёт остаток 1.

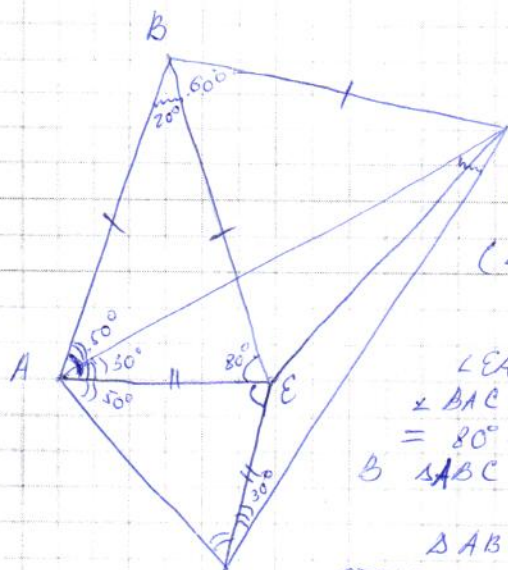
Если $z=2$, то $z^2=4=3+1$, t^2 даёт остаток 1 при делении на 3.

Т.к остаток от деления на 3 выражения 2^{2k+1} равен 2, остаток от деления на 3 выражения $(2k+1)^{2016}$ равен 1, сумма остатков равна 3, то выражение $2^{2k+1} + (2k+1)^{2016}$ делится на 3, при этом при $k \in \mathbb{N}$ число не делится на 3, т.е. сумма является составным числом.

Значит, $2^n + n^{2016}$ кратно 3, то есть не является простым числом, кроме случая $n=1$.

Ответ: $n=1$.

N4



$\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$ $\triangle ABE$ — равнобедренный (по признаку), $AB = BE$.

По теореме о сумме углов $\triangle ABE$ $\angle ABE = 180^\circ - \angle BAE - \angle BEA = 20^\circ$

$\angle CAE = \angle CEA = 80^\circ$ $\triangle CAE$ — равнобедренный (по признаку), $AC = CE$

По теореме $\triangle ABE \sim \triangle ACE$ по двум углам ($\angle BAE = \angle CAE$, $\angle BEA = \angle CEA$), значит,

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$

$\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$ $\triangle AED$ — равнобедренный $AE = ED$
 $\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE = \angle BAE - (\angle CAE - \angle EAD) =$
 $= 80^\circ - (80^\circ - 50^\circ) = 50^\circ$

В $\triangle ABC$ и $\triangle AED$: $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$, $\angle BAC = \angle EAD = 50^\circ$,

$\triangle ABC \sim \triangle AED$ по пропорциональности двух сторон и углу между ними,

Т.к $AE = ED$ то $AB = BC$, $\angle ABE = 80^\circ$, $\angle ECB = \angle ABC - \angle ABE = 60^\circ$,
 $\triangle EBC$ — равнобедренный с углом 60° , значит, он равнобедренный, что и требовалось доказать.

№5. Если три числа образуют сет, то в их разности присутствуют все три цифры. Примеры сетов разной сложности:

I. 1) $\overline{1111}$, $\overline{1112}$, $\overline{1113}$
 2) $\overline{1231}$, $\overline{1232}$, $\overline{1233}$

II. 1) $\overline{1111}$, $\overline{1122}$, $\overline{1133}$
 2) $\overline{1231}$, $\overline{1222}$, $\overline{1213}$

III. 1) $\overline{1111}$, $\overline{1222}$, $\overline{1333}$
 2) $\overline{1231}$, $\overline{1312}$, $\overline{1123}$

IV. 1) $\overline{1111}$, $\overline{2222}$, $\overline{3333}$
 2) $\overline{1231}$, $\overline{2123}$, $\overline{3312}$

Пусть тройка чисел образует сет первой сложности, т.е. в них совпадают цифры трех разрядов. Тогда, чтобы повысить сложность сета, необходимо цифры этих разрядов заменить на несовпадающие. Сделать это можно несколькими способами, переставляя несовпадающие цифры, если они различны. Аналогично для чисел сетов сложности 2 и 3 (способов выбрать из трех цифр различия больше, чем способов выбрать одинаковые). Т.к. сложность сета можно увеличить перестановкой различных цифр, то больше всего сетов большей сложности, т.е. IV.

Ответ: сетов четвертой сложности. 4.