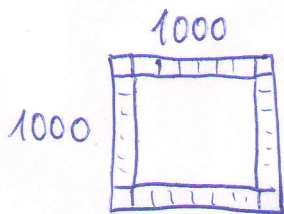
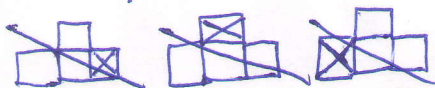


N1



кроме 4 клеток на углах
Все клетки границы доски,
шириной в 1 клетку, не
могут быть равновесными, т.к.
имеют только 3 соседних клетки,

а при 3 соседних клетках
равновесность не может достигаться, потому



что у равновесной клетки
число соседей всегда четное
(2 или 4) т.к. сумма 4

белых равна 4.

$\Rightarrow$ * Максимальное количество
равновесных клеток любого цвета
достигается, когда все клетки доски,
которые могут быть равновесными,
являются равновесными.

То есть, когда все клетки, ~~кроме~~
~~границы~~ ~~об~~ квадрата 998×998 , ограниченного
границей доски, шириной в 1 клетку, а
так же 4 клетки на углах являются
равновесными достигается

максимальное количество равновесных
клеток любого цвета, равно

$$998 \cdot 998 + 4 = 996008$$

Рассмотрим случай, когда достигается
это максимальное ~~количество~~ количество.



$\Rightarrow$ Белых и синих клеток поровну
(клетки с точкой внутри - $\square$ равновесные)

Заметим, что любой вариант

покрышки доски можно получить из этого варианта за KEN шагов. Шаг: замена цвета одной клетки.

Докажем

~~Заметим~~, что за 1 шаг число синих равновесных клеток

либо убывает, ~~либо~~ либо не изменяется, если этот шаг не выполняется над

2^2 клетками на углу доски (клетки 1 и 2)

Когда выполняется 2^2 шага над 2^2 клетками угол может увеличить количество синих равновесных клеток максимум на 2^2 , переключив их все в синий цвет.

Когда выполняется шаг над любой клеткой кроме 2^2 углов $(1,1)$, количество синих равновесных не увеличивается или убывает, так как любая клетка доски, кроме углов соседняя ~~какой~~ хотя бы одной равновесной

клеткой и нарушает её равновесность
 ($\Rightarrow$ кол-во убавляет) или это одна из
~~чередующая~~ чередующая через 1
 клеток граница (она отмечена X на рисунке)
 изменение цвета которых не
 изменит кол-во сильно равновесных
 клеток

$\Rightarrow$ сразу K маров

количество сильно равновесных
 не увеличится $\Rightarrow$ по принципу макс. макс.
 499 498004

$\star 2 + 500 \cdot 998 = 499002$ - максимальное
 количество сильно равновесных клеток

1000

$\Rightarrow$ более 498004 ~~499002~~

равновесных сильно
 быть не может

$\Rightarrow$ более 600000 максимум
 клеток быть не может,
 т.к. $600000 > 499002$
 498004

Ответ: нельзя раскрасить
 доску так, чтобы на ней
 было более 600000 сильно
 равновесных клеток.

N2

$$A = 2^n + n^{2016} - \text{нечётное}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{если } n \equiv 2 \Rightarrow n = 2k, k \in \mathbb{Z} \quad * \quad k \in \mathbb{N}$$

$$2^{2k} + (2k)^{2016} = 2 \cdot 2^{2k} + 2^{2016} \cdot k^{2016} \div 2$$

$\Rightarrow$ нечётное число если

$$2^{2k} + 2^{2016} \cdot k^{2016} = 2,$$

$$\text{но } 2^{2k} + 2^{2016} \cdot k^{2016} > 2$$

$$2^n \rightarrow 1$$

$$n^{2016} \rightarrow$$

$$\text{но } f(x) = 2 \quad f(k) = 2^{2k} + 2^{2016} \cdot k^{2016}$$

монотонно возрастающая
функция

$\Rightarrow$ минимальное значение при $k=1$

$$2^2 + 1 \cdot 2^{2016} > 2$$

$\Rightarrow$ при $n \equiv 2$ A - нечётное

$$\Rightarrow n \not\equiv 2$$

$$n=1$$

$$A = 2^1 + 1^{2016} = 3 - \text{нечётное}$$

$$* \quad 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{если } n \equiv 3 \Rightarrow n = 3k, k \in \mathbb{N}$$

$$A = 2^{3k} + (3k)^{2016} = (2^k)^3 + ((3k)^{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7})^3 =$$

$$= (2^k + (3k)^{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7}) \dots, \text{ но с помощью}$$

$$\text{сумма кубов } \Rightarrow A \equiv (2^k + (3k)^{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7}) \pmod{4}$$

$$\Rightarrow \text{A не м.к. } A: (2^k + (3k)^{2 \cdot 3 \cdot 7}) < A = 2^{3k} + (3k)^{2016}$$

$$\text{A не простое} \Rightarrow n \neq 3$$

$$\Rightarrow n = 3k + r, k \in \mathbb{N} \text{ или } n = 1$$

Рассмотрим два возможных значения r от деления на 3 числа n ($n \neq 1$)

$$1) r = 1$$

$$n = 3k + 1$$

$$A = 2^n + n^{2016} = 2^{3k+1} + (3k+1)^{2016}$$

$$(3k+1)^{2016} \pmod{3} = 1, \text{ согласно Бинет-Жоржана}$$

$$2^1 \pmod{3} = 2$$

$$2^2 \pmod{3} = 1$$

$$2^3 \pmod{3} = 2$$

$$\Rightarrow 2^k \pmod{3} = 2 \text{ если } k \neq 2$$

$$2^k \pmod{3} = 1 \text{ если } k \equiv 2$$

$$\Rightarrow 2^{3k+1} \pmod{3} = 2, \text{ м.к. } (3k+1) = n, \text{ а } n \neq 2$$

$$\Rightarrow \text{м.к. } 2^{3k+1} \pmod{3} = 2$$

$$(3k+1)^{2016} \pmod{3} = 1$$

$$A \pmod{3} = 0 \Rightarrow \text{A не простое}$$

$$\Rightarrow \text{м.к. } A: 3 \text{ и } A \neq 3 (A=3 \text{ при } n=1)$$

$$A \text{ не простое} \Rightarrow n \neq 3k+1$$

$$\Rightarrow \text{A не простое}$$

$$n \pmod{3} \neq 1$$

$$2) r = 2 \quad n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$$

$$A = 2^{3k+2} + (3k+2)^{2016}$$

$$2^{3k+2} \pmod{3} = 1, \text{ м.к. } 3k+2 = n$$

$$2^{3k+2} \bmod 3 = 2^2 \bmod 3, \text{ м.к. } 3k+2 = n \div 2$$

$$(3k+2)^{2016} \bmod 3 = 2^{2016} \bmod 3, \text{ согласно функции } f(x) = x \bmod 3.$$

$$2^{2016} \bmod 3 = 1, \text{ м.к. } 2016 \div 2$$

$$\Rightarrow (3k+2)^{2016} \bmod 3 = 1$$

$$2^{3k+2} \bmod 3 = 2$$

$$\Rightarrow A \bmod 3 = 0 \Rightarrow A \div 3$$

$$\text{м.к. } A \div 3 \text{ и } A \neq 3 (A=3 \text{ при } n=1)$$

$$A \text{ не простое} \Rightarrow n \bmod 3 \neq 2$$

~~Рассмотрев 2 случая, можно было,~~

~~что $n=1$ единственное n ,~~

~~при котором A простое,~~

~~м.к. при $n \geq 1$ доказать что $n \div 2$ и $n \div 3$,~~

~~но при $n \div 3$ A всегда не простое (также $n=1$)~~

$$n=1$$

или

$$n > 1 \text{ доказать что}$$

$$n \div 2$$

$$n \div 3, \text{ но}$$

так же рассматрив 2 случая,

когда $n \div 3$ выведем

что такая n нет, м.к.

при любом $n \div 3$ и $n \div 2$

A не простое

$$\Rightarrow A \text{ простое при единственном } n, \\ n=1$$

Ответ: 1

Справка 6

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ |x - y| < 1 & (2) \\ |y - z| < 1 & (3) \end{cases}$$

N3

(1) $x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$
 $\Rightarrow$ график (1) уравнения
 это окружность с радиусом $\sqrt{5}$
 и центром $(0; 0)$

(2) $|x - y| < 1$

$|x - y| - 1 < 0$

м.к. $(|x - y| + 1) > 0$ делим на $(|x - y| + 1)$ обе части

$(|x - y| - 1)(|x - y| + 1) < 0$

$(x - y)^2 - 1 < 0$ м.к. $(|x - y|)^2 = (x - y)^2$

$(x - y - 1)(x - y + 1) < 0$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - y - 1 < 0 \\ x - y + 1 > 0 \\ x - y - 1 > 0 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x - 1 \\ y < x + 1 \\ y < x - 1 \\ y > x + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ график решений
 (2) неравенства
 ограничен
 прямыми $y = x - 1$

и $y = x + 1$

точка $(0; 0)$

является ~~решением~~
 решением $y > x - 1$

и $y < x + 1$

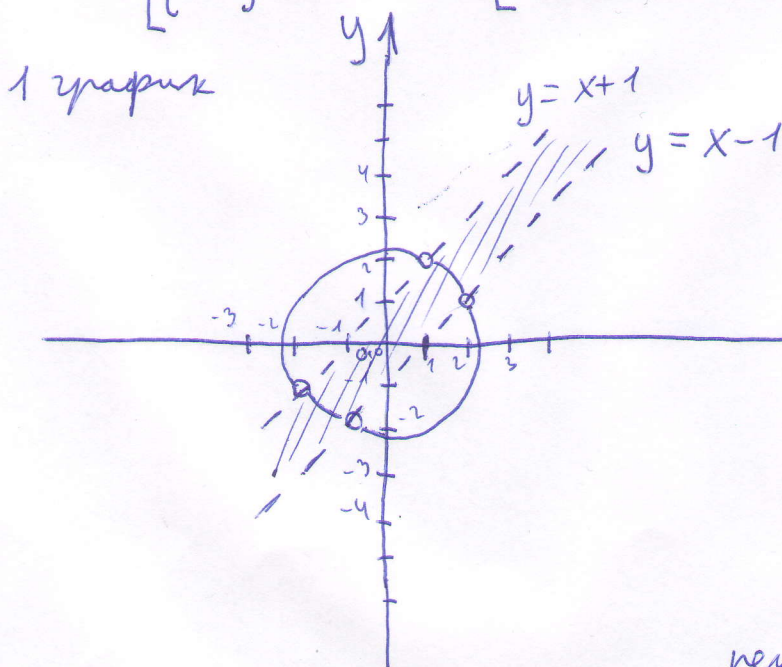
$\Rightarrow$ решение ~~на~~

$$\begin{cases} y > x - 1 \\ y < x + 1 \end{cases}$$

это полосу,
 ограниченную $y = x + 1$
 и $y = x - 1$, а

решения $\begin{cases} y < x - 1 \\ y > x + 1 \end{cases}$

пустое множество.



1 график

$\Rightarrow$ график решений $|x - y| < 1$ (2) - полоса, ограниченная

Ограниченная системой $y=x+1$ и $y=x-1$
(не включенная их)

график $x^2+y^2=5$ - окружность с $R=\sqrt{5}$ и $O(0;0)$

$\Rightarrow$ точки $(1;2); (2;1); (-2;-1); (-1;-2)$

принадлежат этой окружности,

т.к. расстояние от них до $(0;0)$ равно $\sqrt{5}$

$$\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

эти точки также принадлежат прямой $y=x+1$
и $y=x-1$

$(1;2)$ и $(-2;-1)$ - прямой $y=x+1$, т.к.

$$2=1+1 \quad -1=-2+1$$

$(2;1)$ и $(-1;-2)$ - прямой $y=x-1$

$\Rightarrow$ то определен по графику $x^2+y^2=5$ (1)

и $|x-y|<1$ (2), что

~~решение~~ графиком решений системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \text{эллипс} \\ |x-y|<1 & \text{две прямые} \end{cases}$$

окружности, ограниченная

точками $(1;2)$ и $(2;1)$, $(-1;-2)$ и $(-2;-1)$

(см. 1 график)

$$(3) |y-z|<1 \quad (3)$$

$$\text{т.к. } |y-z|=|z-y|$$

$$|z-y|<1 \Leftrightarrow |y-z|<1$$

$\Rightarrow |z-y|<1$ отнимается от $|x-y|<1$

лишь буквой, обозначающей переменную

$\Rightarrow$ график решений $|z-y|<1$ будет

так же, как график $|x-y|<1$, только ~~на~~

Страница 8

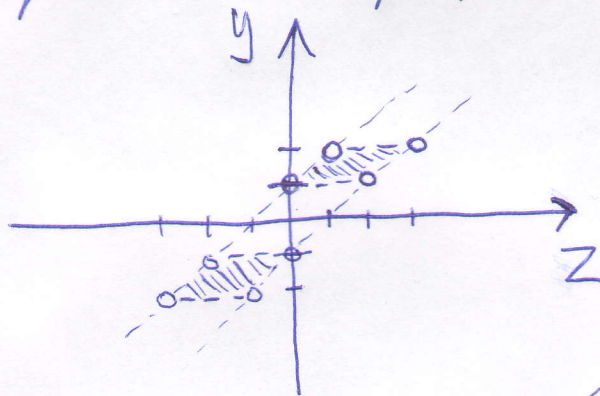
положится в $y(z)$, а не $y(x)$ системе координат. ~~а ограничен по Ox .~~

$\Rightarrow$ график решения системы $\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases}$

в системе $\neq$ системе координат $y(z)$ выглядит как график решения $|x-y| < 1$, но ограничен по Oy , т.к. ~~решение~~ решение $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$ включает в себя только

$$y \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

Построим этот график:



графиком решения системы $\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases}$

в системе ^{координат} $y(z)$ являются 2 параллелограмма с вершинами в $(1; 2); (3; 2); (2; 1); (0; 1)$

и $(0; -1); (-1; -2); (-2; -1); (-3; -2) - (z; y)$,

не включающие стороны и вершины.

~~только~~ (в решение включается только внутренняя ~~часть~~ часть параллелограмма)

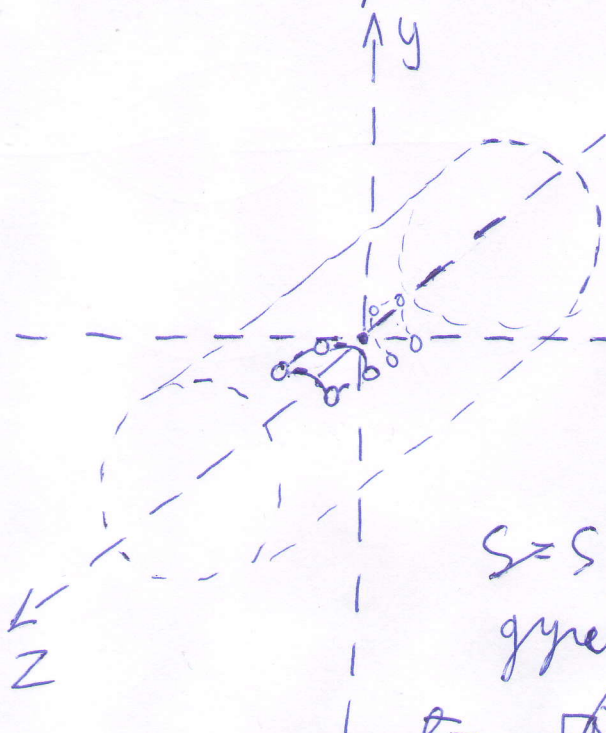
Составляя проекции трёхмерного множества решений на плоскости $y(x)$ и $y(z)$ делаем вывод, что трёхмерное множество решений

системы $\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases}$ представляет собой:
 2 сектора цилиндра, ограниченных параметрами на его поверхности, т.к.

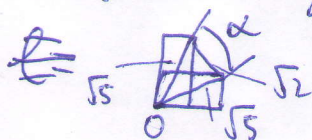
цилиндр
 центр основания на OZ
 $R = \sqrt{5}$

Эти 2 сектора в проекции на $y(x)$ дают 2 дуги, а на (yz) $y(z)$ 2 параметра.

$\Rightarrow$ Площадь S
 этого сектора ~~равна~~
 равна площади прямоугольника на поверхности цилиндра со сторонами $2R$ и l



$S = S$ равна 2 умноженно на длину дуги из графика 1.



по теореме косинусов:
 $2 = 5 + 5 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

l -длина дуги $l = \frac{\arccos \frac{4}{5}}{2\pi} \cdot 2\pi R = \arccos \frac{4}{5} \cdot \sqrt{5}$,
 ($\arccos \frac{4}{5}$ в радианах)

Страница 10

$$S = 2 \cdot l = 2 \cdot \arccos \frac{4}{5} \cdot \sqrt{5}$$

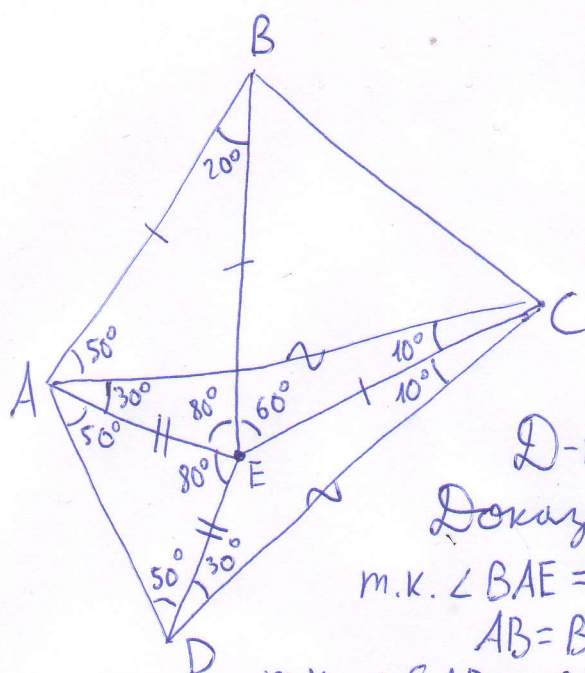
~~$S_{\text{обуза}}$~~ $S_{\text{обуза}} = 2S = 4\sqrt{5} \cdot \arccos \frac{4}{5}$, м.к.
 $S_{\text{обуза}}$ из 2-х прямоугольных треугольников S .

Ответ: $4\sqrt{5} \cdot \arccos \frac{4}{5}$

См. задачу 11

№4

18A



Дано:

выпуклый четырехугольник ABCD

Внутри $\triangle ACD$

$$\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$$

$$\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$$

$$\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$$

Д-м: $\triangle BEC$ - равнобедренный

Докажем это:

м.к. $\angle BAE = \angle BEA$ $\triangle ABE$ - равнобедренный $\Rightarrow AB = BE$

м.к. $\angle CAD = \angle CDA$ $\triangle CAD$ - равнобедренный $\Rightarrow AC = CD$

м.к. $\angle EAD = \angle EDA$ $\triangle AED$ - равнобедренный $\Rightarrow AE = ED$

$$\angle CAE = \angle CAD - \angle EAD = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

$$\angle CDE = \angle CDA - \angle EDA = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

$$= \angle CAE = \angle CDE$$

$\triangle CAE = \triangle CDE$, м.к. $\angle CAE = \angle CDE$, $AC = CD$ и $AE = ED$
 $\Rightarrow \angle ACE = \angle DCE$

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle CAD - \angle CDA = 180^\circ - 80^\circ \cdot 2 = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

по теореме о сумме углов в треугольнике. (из $\triangle CAD$)

$$\angle ACD = \angle ACE + \angle DCE = 2\angle ACE$$

$$\angle ACE = \frac{\angle ACD}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

$$\angle ACE = \angle DCE = 10^\circ$$

$$\angle AED = 180^\circ - \angle EAD - \angle EDA = 180^\circ - 50^\circ \cdot 2 = 80^\circ \text{ из } \triangle AED$$

$$\angle DEC = 180^\circ - \angle EDC - \angle ECD = 180^\circ - 30^\circ - 10^\circ = 140^\circ \text{ из } \triangle ECD$$

$$\angle BEC = 360^\circ - \angle BEA - \angle AED - \angle CED = 360^\circ - 80^\circ - 80^\circ - 140^\circ =$$

$$= 220^\circ - 160^\circ = 60^\circ \quad \angle ABE = 180^\circ - \angle BAE - \angle BEA = 180^\circ - 80^\circ \cdot 2 = 20^\circ$$

Применим теорему синусов для $\triangle ABE$ и $\triangle CED$:

См. рисунок 12

для $\triangle ABE$: $\frac{\sin 20^\circ}{AE}$

$$\frac{AE}{\sin \angle ABE} = \frac{AB}{\sin \angle AEB} \quad \frac{AE}{\sin 20^\circ} = \frac{AB}{\sin 80^\circ} \quad (1)$$

для $\triangle CED$:

$$\frac{EC}{\sin \angle EDC} = \frac{ED}{\sin \angle ECD} \quad \frac{EC}{\sin 30^\circ} = \frac{ED}{\sin 10^\circ} \quad (2)$$

~~м.к. EC =~~ м.к. ED = AE и AB = BE

$$\begin{cases} \frac{AE}{\sin 20^\circ} = \frac{BE}{\sin 80^\circ} \quad (1) \\ \frac{EC}{\sin 30^\circ} = \frac{AE}{\sin 10^\circ} \quad (2) \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{Подставим AE из (2) в (1)} \\ &AE = \frac{\sin 10^\circ \cdot EC}{\sin 30^\circ} \text{ из (2)} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin 10^\circ \cdot EC}{\sin 30^\circ \cdot \sin 20^\circ} = \frac{BE}{\sin 80^\circ}$$

$$BE = \frac{\sin 80^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot EC}{\sin 30^\circ \cdot \sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 10^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot EC}{\frac{1}{2} \cdot 2 \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} = EC \Rightarrow BE = EC \Rightarrow$$

$\triangle EBC$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle EBC = \angle BCE$

$$\angle EBC + \angle BCE + \angle BEC = 180^\circ$$

$$2\angle EBC = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\angle EBC = 60^\circ$$

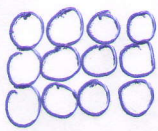
$$\angle EBC = \angle BCE = \angle BEC = 60^\circ \Rightarrow$$

$\triangle BEC$ - равносторонний,
что и требовалось доказать.

N 5

Рассчитаем количество сетей всевозможных сетей для каждой плотности.

Сети 0 плотности:

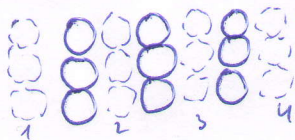


В каждом разряде по 3 варианта
111, 222, 333 $\Rightarrow$

общее кол-во таких сетей $3^4 = 81$,

т.к. 4 разряда и 3 варианта в каждом.

Сети 1 плотности:



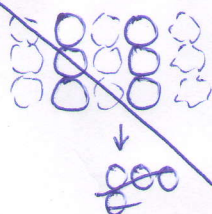
в 3 разрядах по 3 варианта
по 111, 222, 333 + и между

этими 3 разрядами ставится 4 разряд на
одно из 4 мест (4 разряд имеет 6 вариантов
 $3! = 3 \cdot 2 = 6$ 123, 132, 231, 213, 311, 321).

$\Rightarrow$ кол-во сетей 1 плотности

$$3^3 \cdot 4 \cdot 6 = 27 \cdot 24 = 648$$

~~Сети 2 плотности:~~



~~в 2 разрядах по 3 варианта
111, 222, 333 и между ними~~

~~ставится 3 разряд на~~

~~одно из 3 мест, а~~

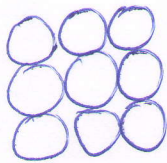
~~после между первым, вторым~~

~~и третьим разрядами ставится 4 разряд
на одно из 4 мест~~

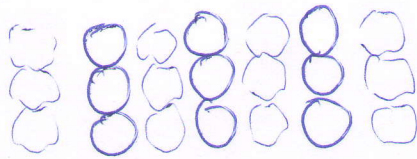
~~3 и 4 разряды имеют по 6 вариантов.~~

Страница 14

Сети 3 слотности:



в 3 разряда по 6
вариантов и между



линии ставится

разр на одну из 4

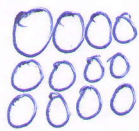
возможных мест

разр с 3 вариантами =>

общее кол-во сетей 3 слотности:

$$6^3 \cdot 4 \cdot 3 = 2592$$

Сети 4 слотности:



4 разряда по 6 вариантов

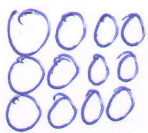
=> общее кол-во сетей

4 слотности:

$$6^4 = 1296$$

Общее количество ~~всех~~ сетей

всего возможных слотности:



$9^4 = 6561$, т.к. 4 разряда

и в каждом по 9 вариантов

(3 если ^{все} одинаковые, 6 если ^{все} разные)

=> сетей 2 слотности ~~это~~ ^{это} общее количество
вычтем количество сетей всех остальных
слотностей

$$6561 - 1296 - 2592 - 648 - 81 = 1944$$

$\Rightarrow$ #

сложность	кол-во сетов
0	81
1	648
2	1944
3	2592
4	1296

$\Rightarrow$ сетов 3 сложности в игре
 больше + веро, потому что
~~количество~~
 вероятности выпадения

такого сета ~~1296~~ $\frac{2592}{6561}$ самая большая

$$\left(\frac{2592}{6561} > \cancel{1} \frac{1944}{6561} > \frac{1296}{6561} > \frac{648}{6561} > \frac{81}{6561} \right)$$

Ответ: третьей сложности.