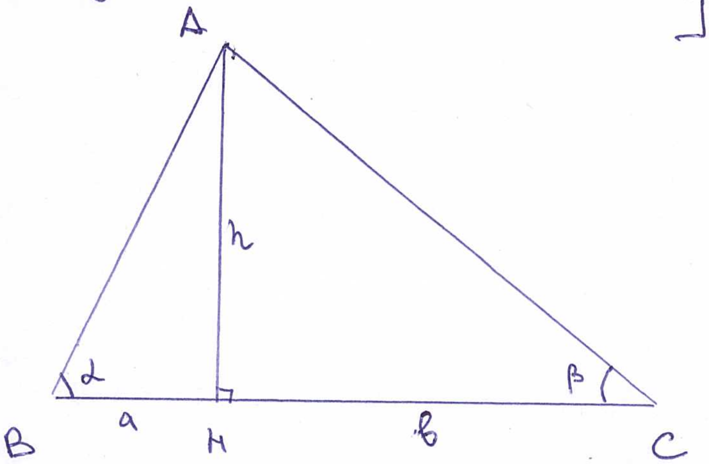
Задача 1.



] В $\triangle ABC$ $\angle A$ - наибольший. Проведём из A — AH - высоту. Она упадёт на отрезок BC, независимо от того, угол A острый или нет.

] $AH = h$, $BH = a$, $CH = в$.
$\angle ABC = \alpha$
$\angle ACB = \beta$.

Тогда сумма tg-сов равна

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg(180-(\alpha+\beta)) = tg\,\alpha + tg\,\beta + tg(-(\alpha+\beta)) =$$

$$= tg\,\alpha + tg\,\beta - tg(\alpha+\beta) = tg\,\alpha + tg\,\beta - \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} =$$

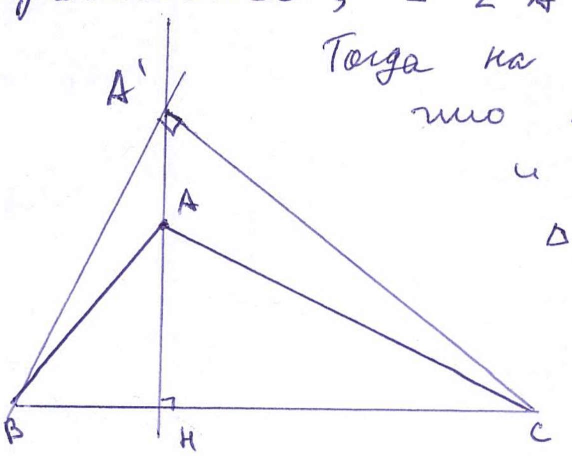
$$= \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta\,(tg\,\alpha + tg\,\beta) - tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} =$$

$$= \frac{tg\,\alpha \cdot tg\,\beta\,(tg\,\alpha + tg\,\beta)}{tg\,\alpha \cdot tg\,\beta - 1} = 2016.$$

Заметим, что $tg\,\alpha = \frac{h}{a}$; $tg\,\beta = \frac{h}{в}$. Подставим в ф-лу.

$$\frac{\frac{h^2}{aв}\left(\frac{h}{a} + \frac{h}{в}\right)}{\frac{h^2}{aв} - 1} = \frac{\frac{h^3}{aв}\left(\frac{a+в}{aв}\right)}{\frac{h^2 - aв}{aв}} = \frac{h^3(a+в)}{aв(h^2 - aв)} = 2016 \Rightarrow$$

$h^2 > aв$. Докажем, что тогда $\angle A < 90°$. Положим противное,] $\angle A \geq 90°$



Тогда на прямой AH выберем точку A', такую что A и A' по одну сторону от BC, и $\angle BA'C = 90°$

$\triangle A'BC$ - прямоугольный, значит в нём

$A'H = \sqrt{BH \cdot HC}$, и $AH \leq A'H \Rightarrow$

$AH \leq \sqrt{BH \cdot HC}$. Но по предположению $AH > \sqrt{BH \cdot HC}$. Противоречие.

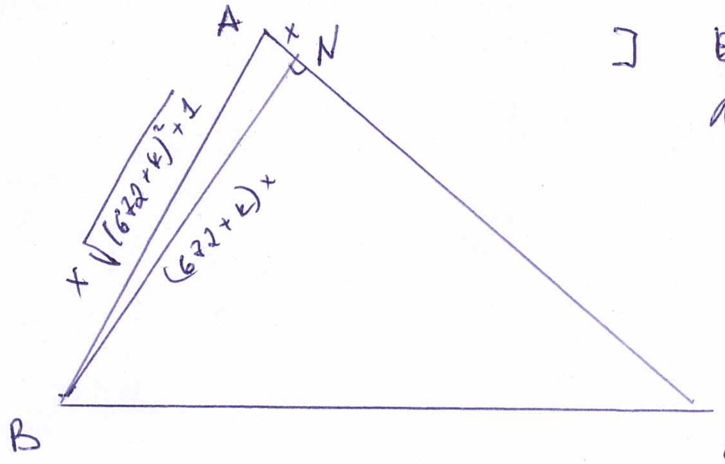
Следовательно $\angle A$ - острый и $\triangle ABC$ - остроугольный.

Задача 1 (продолжение).

Т.к $\triangle ABC$ – остроугольный, то $tg\,\alpha,\ tg\,\beta,\ tg(180-\alpha-\beta) > 0$.

$\Rightarrow\ tg\angle A \geqslant \frac{2016}{3} = 672$. (т.к если он < 672, то $tg\,\alpha < tg\angle A < 672$, $tg\,\beta < tg\angle A < 672$, их сумма не может быть равна 2016).

Пусть $tg\angle A = 672 + k,\ k \geqslant 0$.



$\exists$ BN – высота, тогда N – на отрезке AC, т.к $\triangle ABC$ – остроугольный

$\exists$ $AN = x$,

тогда $BN = (672+k)\cdot x$

$AB = x\sqrt{(672+k)^2+1^2}$

$$\sin\angle ABN = \frac{x}{x\sqrt{(672+k)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(672+k)^2+1}}$$

Докажем, что $\angle ABN < 1^\circ = \frac{\pi}{180}$.

Воспользуемся тождеством $\sin x < x$ и докажем, что $\sin\angle ABN < \frac{\pi}{180}$. Возведем в квадр

$$\frac{180^2}{(672+k)^2+1} \overset{?}{<} \pi^2$$

Очевидно, что $\frac{180^2}{(672+k)^2+1} < 1$, в то время как $\pi^2 > 9$.

Значит $x < \sin x < \frac{\pi}{180} \to x < \frac{\pi}{180}\quad x < 1^\circ$.

Значит $\angle NAB = \angle A > 89^\circ$, но при этом $< 90^\circ$

~~$\angle A \in$~~ $\quad 89^\circ < \angle A < 90^\circ$

Ответ $\quad 89^\circ < \angle A < 90^\circ$

Задача 2.

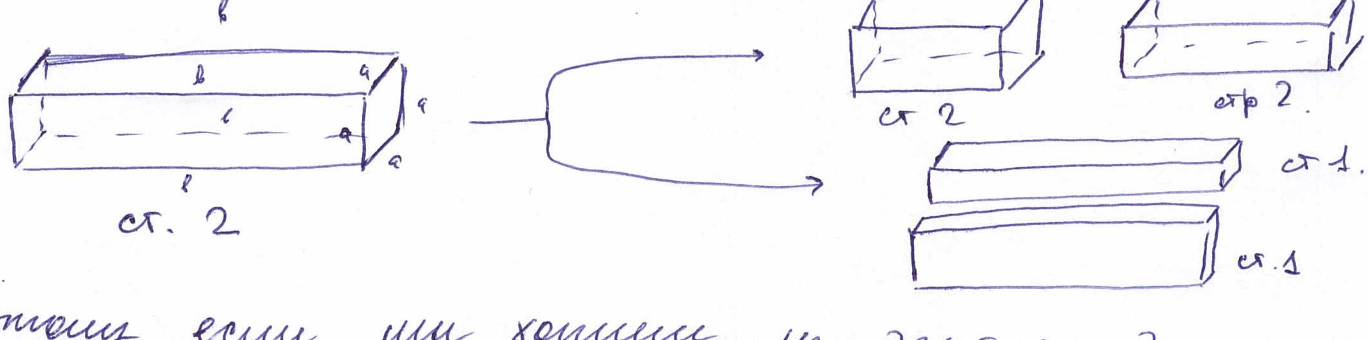
1) Оценка:

Заметим, что чтобы получать прямоугольные параллелепипеды, необходимо проводить разрезы только по плоскостям, параллельным граням куба.

Опр. Будем называть прямоугольный параллелепипед элитным n-ной степени, если у него равны n измерений (длина, ширина, высота).

Например, куб — элитный 3 степени, а длинный параллелепипед — элитный 1 степени.

Заметим, что параллелепипед элитный n-ной степени одним разрезом бьется на 2 элитных параллелепипеда, степени которых $\geq n-1$. Это утверждение очевидно, т.к одним разрезом мы можем нарушить равенство максимум одного измерения:



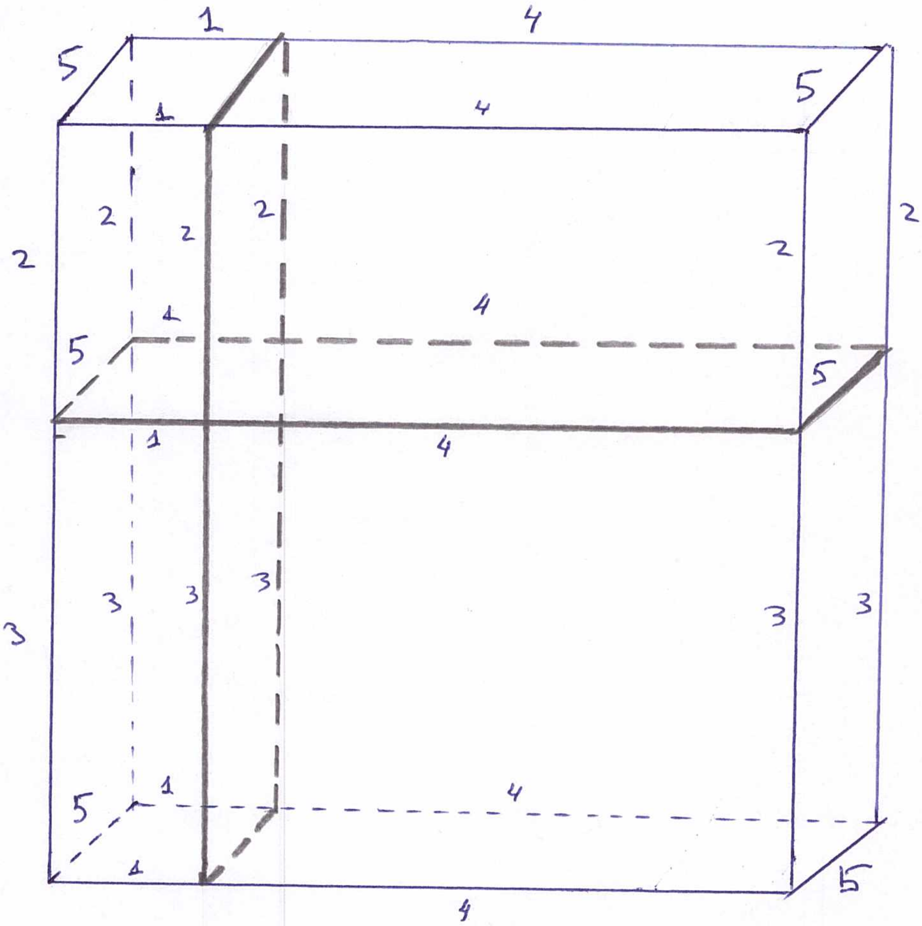
Поэтому если мы хотим из элитного 3 степени (куб) получить элитный 1 ст. (длинный), то необходимо сделать минимум 2 шага, чтобы $3\text{ ст} \to 2\text{ ст} \times 2$, $2 \times 2\text{ ст} \to 4 \times 1\text{ ст}$.

Ответ оценки: 4 шт.

Задача 2 (продолжение)

2) Пример.

$\exists$ ребро куба $= 5$.



Получаем 4 ~~прямоугольн~~ различных параллелепипеда с измерениями

$(1; 2; 5)$,

$(2; 4; 5)$,

$(1; 3; 5)$,

$(3; 4; 5)$.

Следовательно это возможно.

Ответ к задаче: 4

Задача 3.

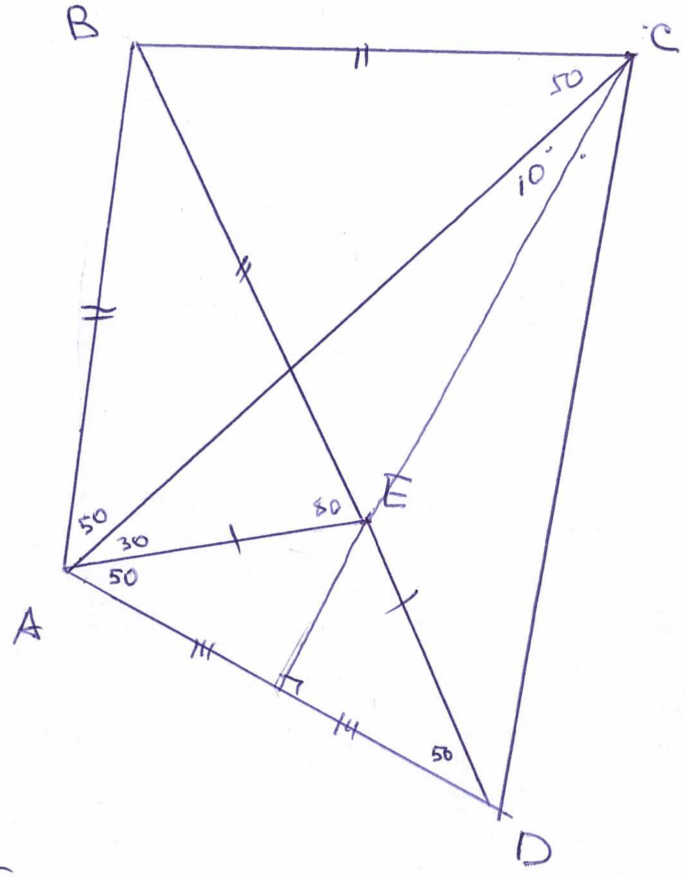
1. Заметим, что $n=1$ подходит под условие
$2^1 + 1^{2016} = 3$ – простое

2. Докажем, что при $n > 1$, число $2^n + n^{2016}$ – сост.
Заметим, что если $n \vdots 2$, то
$2^n + n^{2016} \vdots 2$, т.к $2^n \vdots 2$ и $n^{2016} \vdots 2$, и $2^n + n^{2016} > 2 \Rightarrow$
$n \vdots 2$ не подходит под условие.
Значит, n нечетное.
Тогда $2^n \equiv 2 \pmod 3$
1) если $n \not\vdots 3$, то $n^{2016} \equiv (n^2)^{1008} \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow$
$2^n + n^{2016} \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$
$2^n + n^{2016} > 3 \Rightarrow 2^n + n^{2016}$ – составное.
2) если $n \vdots 3$, то пусть $n = 3k$, то тогда
$2^{3k} + n^{2016} = (\underset{a}{2^k})^3 + (\underset{b}{n^{672}})^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a + b > 1$
$a^2 - ab + b^2 > 1$ $\Big| \Rightarrow a^3 + b^3$ – составное.
Значит, при $n > 1$ число $2^n + n^{2016}$ – составное.

Ответ: $n = 1$.

Задача 4.



Решение:

1. Заметим, что $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, т.к $\angle BAE = \angle BEA = 80°$ и $\angle CAD = \angle CDA = 80$.

Значит $\frac{AB}{CA} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \quad (1).$$

Т.к $\angle EAD = \angle EDA$, то $\triangle AED$ – равнобедренный

$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE = \angle BAE - \angle CAD + \angle EAD = 50°$

Т.к $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$, ~~что~~ и $\angle BAC = \angle EAD$, то $\triangle AED \sim \triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ равнобедренный и $\angle BCA = \angle BAC = 50°$

Т.к $\angle BAE = \angle BEA$, то $\triangle ABE$ – равнобедр $\Rightarrow AB = BE \Rightarrow BE = BC$.

3. Проведем ср. пер. к AD. Он пройдет через E, т.к $AE = ED$ и C, т.к $AC = CD \Rightarrow CE$ – высота в $\triangle ACD \Rightarrow CE$ – биссектриса $\Rightarrow \angle ACE = 90° - \angle CAD = 10°$. $\Rightarrow \angle BCE = 60°$

4. В $\triangle BCE$, $BC = BE$, и $\angle BCE = 60° \Rightarrow \triangle BCE$ – равносторонний. Что и тр. док-ть.

Задача 5. 7/8

Заметим, что по любым двум числам можно восстановить третье так, чтобы три числа образовывали сет, и при этом это можно сделать однозначно.

Покажем, как это можно сделать.

Будем рассматривать ~~раз~~ цифры на разрядах первых двух чисел. Если они равные, то и у третьего числа будет такая же ~~число~~ цифра. А если разные, то и у третьего числа будет цифра, не равная ни цифре 1 числа, ни цифре 2 числа.

Таким образом, достаточно лишь посчитать, сколько существует чисел, у которых 1 цифра совпадает, 2 совпадают, 3 совпадают, 4 совпадают, 0 совпадают для каждого числа

1 цифра совпадает:

$$\underbrace{3^4}_{\text{первых чи}} \cdot \underbrace{C_4^1 = 4}_{\text{вариант совпадения}} \cdot \underbrace{2^{4-1}}_{\text{не совпадают}} = 3^4 \cdot 4 \cdot 2^3$$

2 цифры совпадают:

$$\underbrace{3^4}_{\text{перви}} \cdot \underbrace{C_4^2}_{\text{вар выбрать места для 2 совпадений}} \cdot \underbrace{2^{4-2}}_{\text{варианты не совпадают}} = 3^4 \cdot C_4^2 \cdot 2^2 = 3^4 \cdot 6 \cdot 2^2$$

3 цифры совпадают:

$$\underbrace{3^4}_{\text{первых}} \cdot \underbrace{C_4^3}_{\text{вар выбора места для совпадений}} \cdot 2^{4-3} = 3^4 \cdot 4 \cdot 2$$

4 цифры совпадают:

$3^4 \cdot C_4^4 \cdot 2^{4-4} = 3^4 \cdot 1 \cdot 1 = 3^4$

0 цифр совпадают

$3^4 \cdot C_4^0 \cdot 2^4 = 3^4 \cdot 2^4$.

Найдем максимум из 5 чисел

$3^4 \cdot 4 \cdot 2^3$, $3^4 \cdot 6 \cdot 2^2$, $3^4 \cdot 4 \cdot 2$, 3^4, $3^4 \cdot 2^4$.

$\underline{3^4 \cdot 32}$, $3^4 \cdot 24$, $3^4 \cdot 8$, 3^4, $3^4 \cdot 16$

максимальное

Следственно, максимальное кол-во сет-ов достигается, когда 1 цифра совпадает, а остальные 3 различны ⇒ стоимость таких сетов — 3.

Ответ: сетов стоимости 3.