№5

Посчитаем количество сетов 1 сложности:

3 разряда совпадают

C_4^3 - расположение разрядов (вариантов)

$3\cdot3\cdot3$ - различных значений одинаковых разрядов

$3!$ - варианта несовпадающего разряда

$$\frac{C_4^3\cdot 3^3\cdot 3!}{3!} = 3^4\cdot 4$$

Столько раз мы посчитали каждый сет

Количество сетов 2 сложности:

C_4^2 - расположение одинаковых разрядов

$3\cdot3$ - различных значений одинаковых разр.

$3!\cdot3!$ - вариантов несовпадающих разрядов

$$\frac{\cancel{4!}\cdot 3^2\cdot 3!\cdot\cancel{3!}}{2!\cdot2!\cdot3!} = 3^3\cdot 12$$

Количество сетов 3 сложности:

C_4^1 - вариантов расположения одинаковых разрядов

3 - варианта различных одинаковых разрядов

$3!\cdot3!\cdot3!$ - вариантов несовпадающих разрядов

$$\frac{3\cdot4\cdot3!\cdot3!\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 3^3\cdot 16$$

Количество сетов 4 сложности:

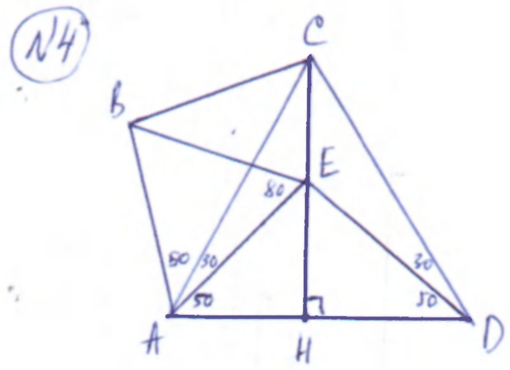
$(3!)^4$ - вариантов различных одинаковых разрядов

$$\frac{(3!)^4}{3!} = (3!)^3 = 3^3\cdot 8$$

$3^3\cdot16$ - наибольшее значение => количество сетов 3 сложности наибольшее.

Ответ: 3 сложности.

№4



II тур Формула единства

Дано:
ABCD - вогнутый четырёхугольник
т.E ∈ △ADC
∠BAE = ∠BEA = 80°
∠CAD = ∠CDA = 80°
∠EAD = ∠EDA = 50°
Доказать △BEC - равносторонний

Решение

Проведём высоту CH △ACD
∠CAD = ∠CDA => △CAD - равнобедренный (по признаку)
CH - медиана и высота (по свойству)
т.H - середина AD
Проведём высоту EH_1 △AED
∠EAD = ∠EDA => △EAD - равнобедренный (по признаку)
EH_1 - медиана и высота (по свойству)
т.H_1 - середина AD
Тогда т.H и т.H_1 - совпадают.
CH⊥AD и EH⊥AD => т.E ∈ CH

Пусть AH = y.

∠CAE = ∠CAH - ∠EAH = 80° - 50° = 30°
∠AEH = 90° - ∠EAH = 90° - 50° = 40°
Из △AEH - прямоугольного: $\sin 40° = \frac{y}{AE}$ $AE = \frac{y}{\sin 40°}$
Из △CAH - прямоугольного: $\cos 80° = \frac{y}{AC}$ $AC = \frac{y}{\cos 80°}$
∠BEC = 180° - ∠BEA - ∠AEH = 180° - 80° - 40° = 60°
∠AEC = 80° + 60° = 140°
По теореме синусов для △ACE: $\frac{CE}{\sin 30} = \frac{AC}{\sin 140}$

$CE = \frac{y \sin 30}{\cos 80 \cdot \sin 40} = \frac{y}{2\cos 80 \sin 40}$

По теореме синусов для △BAE: $\frac{BE}{\sin 80°} = \frac{AE}{\sin 20°}$

$BE = \frac{AE \sin 80}{\sin 20} = \frac{y \sin 80}{\sin 20 \sin 40}$

BE ? CE $\frac{y}{2\cos 80 \cancel{\sin 40}} \stackrel{?}{=} \frac{y \sin 80}{\sin 20 \cancel{\sin 40}}$ $\frac{1}{2\cos 80 \sin 80} = \frac{1}{\sin 20}$

$\frac{1}{\sin 160} = \frac{1}{\sin 20}$ $\frac{1}{\sin 20} = \frac{1}{\sin 20}$ - верно => BE = CE
△BEC - равнобедренный (по определению)
∠BEC = 60° => ∠BCE = ∠CBE = 60° (по свойству)
Тогда △BCE - равносторонний (по признаку)

№2

$2^n + n^{2016}$

Заметим, что если n - четное число, то $2^n + n^{2016}$ так же четное число, больше 2-х ($2^n + n^{2016} \geq 4 + 2^{2016}$)

Значит, при четном n $2^n + n^{2016}$ не является простым.

Рассмотрим все нечетные n.

Допустим, $n \not\vdots 2$ и $n \vdots 3$.

$2016 = 2^5 \cdot 9 \cdot 7$

$n = 3k$, $k \not\vdots 2$

$$2^{(3k)} + (3k)^{2016} = (2^k)^3 + (3k)^{2^5 \cdot 9 \cdot 7} = (2^k)^3 + ((3k)^{2^5 \cdot 3 \cdot 7})^3 \text{ - сумма кубов}$$

$$= (2^k + (3k)^{2^5 \cdot 3 \cdot 7})(2^{2k} - 2^k \cdot (3k)^{2^5 \cdot 3 \cdot 7} + (3k)^{2^6 \cdot 3 \cdot 7})$$

Т.к. выражение имеет хотя бы 2 делителя, больших 1, то оно не простое.

Значит при $n \not\vdots 2$ и $n \vdots 3$ $2^n + n^{2016}$ не простое.

Допустим, что $\begin{cases} n \not\vdots 2 \\ n \not\vdots 3 \end{cases}$

$2^1 \equiv 2 \pmod 3$

$2^2 \equiv 1 \pmod 3$

Т.к. n - нечетное, то $2^n \equiv 2 \pmod 3$

Если $n \equiv 1 \pmod 3$, то $n^{2016} \equiv 1 \pmod 3$

Если $n \equiv 2 \pmod 3$, то: $2^1 \equiv 2 \pmod 3$

$2^2 \equiv 1 \pmod 3$

2016 - четное число $\Rightarrow$ $n^{2016} \equiv 1 \pmod 3$

$2^n + n^{2016} \equiv 0 \pmod 3$

Значит при нечетных и не делящихся на 3 n $2^n + n^{2016} \vdots 3$.

$2^n + n^{2016}$ простое только если $2^n + n^{2016} = 3$.

Это возможно лишь при $n = 1$. (при $n > 1$ $2^n + n^{2016} > 3$)

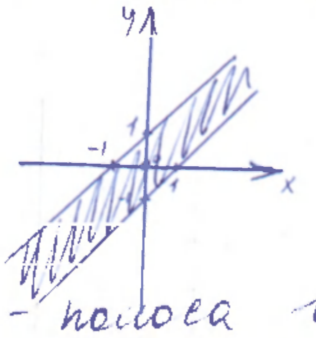
Ответ: $n = 1$

№3)

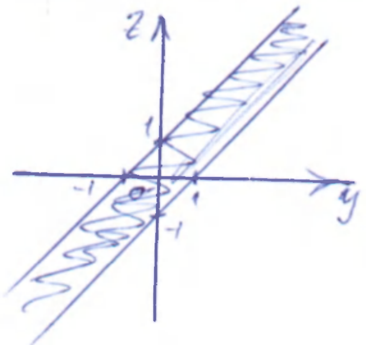
$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ |x-y|<1 \\ |y-z|<1 \end{cases}$$

$x^2+y^2=5$ - уравнение окружности с центром в т. $(0;0)$ и $R=\sqrt{5}$. В трёхмерной системе координат образует бесконечный цилиндр без оснований.

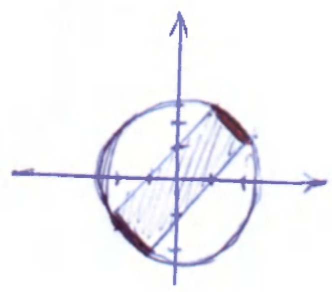
$|x-y|<1$ - полоса в системе координат $x;y$



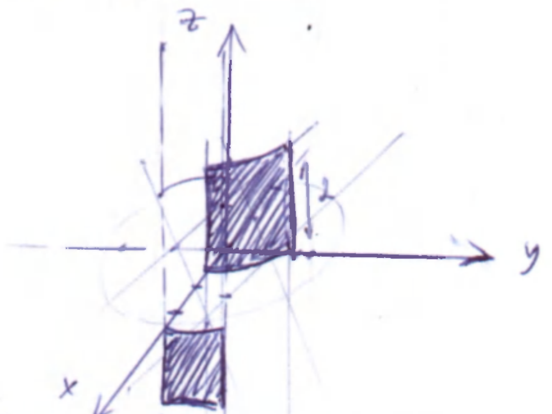
$|y-z|<1$ - полоса в системе координат $(y;z)$



$$\begin{cases} |x-y|<1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

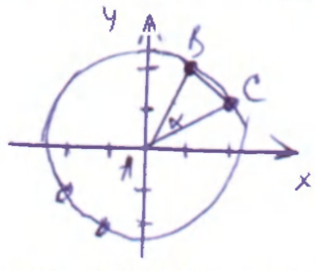


$$\begin{cases} |x-y|<1 \\ |y-z|<1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$



Получаем 2 таких вот области, удовлетворяющие условиям.

Найдём угол α



окружность проходит через т$(1;2)$ и $(2;1)$

$AB=AC=\sqrt{5}$

$BC=\sqrt{2}$

По теореме косинусов

$2=10-2\cos\alpha\cdot 5$

$2\cos\alpha\cdot 5=8$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$

Тогда площадь закрашенных частей

равна $2\cdot\left(\frac{2\pi\cdot\sqrt{5}\cdot 2\cdot \arccos\frac{4}{5}}{360^\circ}\right) = \frac{2\cdot 2\pi\cdot\sqrt{5}\cdot 2\arccos\frac{4}{5}}{360^\circ} =$

$\frac{\sqrt{5}\,\pi\,\arccos\frac{4}{5}}{45^\circ}$

Ответ: $S = \frac{\sqrt{5}\,\pi\cdot\arccos\frac{4}{5}}{45^\circ}$

№1. Ответ: нельзя.