Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Задачи для 5 класса

Пожалуйста, запишите не только ответы, но и их доказательства.

1. В некотором языке есть 3 гласных и 5 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?

2. Приведите пример таких целых чисел a и b, что $ab(2a + b) = 2015$.

3. Маша с Леной вышли из дома и пошли в магазин за мороженым. Маша шла быстрее и дошла до магазина за 12 минут. Потратив 2 минуты на покупку мороженого, она пошла назад и встретила Лену ещё через 2 минуты. Сколько времени потребовалось Лене, чтобы дойти до магазина? Скорости девочек постоянны.

4. Шестеро школьников решили посадить в школьном дворе 5 деревьев. Известно, что каждое дерево сажало разное число школьников и каждый школьник участвовал в посадке одинакового количества деревьев. Могло ли так случиться?

5. В плоском мире есть два прямоугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что площадь первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Аня, Галя, Даша, Соня и Лена приехали в лагерь «Формула Единства» из разных городов: Курска, Вологды, Новороссийска, Петрозаводска и Чебоксар. Знакомясь с другими членами отряда, они рассказали о себе следующее. Соня и Даша никогда не были в Курске. Галя и Соня были вместе в прошлом лагере с девочкой из Новороссийска. Аня и Соня подарили девочке из Чебоксар по сувенирчику. Галя и Соня помогли девочке из Вологды занести вещи в комнату. Галя и Лена общаются по скайпу с девочкой из Чебоксар, а девочка из Новороссийска переписывается в контакте с Аней. Кто где живёт?

Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Задачи для 6 класса

Пожалуйста, запишите не только ответы, но и их доказательства.

1. В некотором языке есть 5 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?

2. Приведите пример таких целых чисел a и b, что $ab(2a + b) = 2015$.

3. На столе лежат три конфеты. У Ани и Лены есть мешок с неограниченным количеством конфет, и они играют в игру. Каждая из них своим ходом добавляет некоторое количество конфет из мешка на стол, но при этом не может положить больше конфет, чем уже лежит на столе. Девочки ходят по очереди, начинает Аня. Выигрывает та, после хода которой на столе окажется ровно 2015 конфет. Кто из девочек может обеспечить себе победу, как бы ни играла соперница?

4. Шестеро школьников решили посадить в школьном дворе 5 деревьев. Известно, что каждое дерево сажало разное число школьников и каждый школьник участвовал в посадке одинакового количества деревьев. Могло ли так случиться?

5. В плоском мире есть два прямоугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Дима варит кашу. Чтобы каша получилась вкусной, ему нужно варить крупу ровно 24 минуты. Обычных часов у Димы нет, но есть двое песочных часов: одни — на 20 минут , другие — на 7 минут. Как Диме точно отмерить требуемое время?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Задачи для 7 класса

Пожалуйста, запишите не только ответы, но и их доказательства.

1. В некотором языке есть 3 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трёх слогов. Слово называется забавным, если в нём встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?

2. Приведите пример таких целых чисел a и b, что $(10a + b)(a + 10b)(a + b + 1) = 2015$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC (какие две из сторон треугольника равны, неизвестно) проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Известно, что $\angle AOB = 120°$. Найдите углы треугольника ABC.

4. По вновь придуманным правилам в каждом математическом бою участвуют одновременно 3 команды. Организаторы хотят провести турнир из нескольких (более одного) боёв так, чтобы каждые две команды встречались между собой ровно один раз. Какое наименьшее число команд нужно для этого пригласить?

5. В плоском мире есть два треугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметры этих островов одинаковы, а площадь прибрежных вод у них различается? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. На плоскости нарисован 2015-угольник со всеми диагоналями. Дима с Сашей играют в следующую игру. Они поочерёдно стирают либо от 1 до 10 соседних сторон нарисованного многоугольника, либо от 1 до 9 его диагоналей. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Первым ходит Дима. Кто из играющих может обеспечить себе победу при любой игре соперника? Как он сможет это сделать?

Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Задачи для 8 класса

1. В некотором языке есть 3 гласных и 8 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трёх слогов. Слово называется забавным, если в нём встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?

2. Один из концов отрезка закрасили в синий цвет, а другой — в красный. Внутри отрезка выбрали 2015 точек и каждую из них произвольным образом закрасили в какой-то из этих же цветов. В результате отрезок разбился на 2016 частей. Может ли количество таких частей, у которых оба конца красные, равняться количеству частей, у которых оба конца синие?

3. В равнобедренном треугольнике ABC (какие две из сторон треугольника равны, неизвестно) проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Известно, что $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

4. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a+2015^b = 2015^c+2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

5. В плоском мире есть два треугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Задачи для 9 класса

1. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

2. Один из концов отрезка закрасили в синий цвет, а другой — в красный. Внутри отрезка выбрали 2015 точек и каждую из них произвольным образом закрасили в какой-то из этих же цветов. В результате отрезок разбился на 2016 частей. Может ли количество таких частей, у которых оба конца красные, равняться количеству частей, у которых оба конца синие?

3. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ выбраны соответственно такие точки M и P, что $AM = CP$. Окружность на диаметре DP пересекает отрезок CM в точке K. Докажите, что MK и BK перпендикулярны.

4. Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

5. В плоском мире есть два острова, которые имеют форму выпуклых многоугольников. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Задачи для 10 класса

1. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a+2015^b = 2015^c+2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

2. Сколько пятизначных чисел делятся на свою последнюю цифру?

3. Точки H, K и M лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, в котором AH является высотой. Докажите, что AH служит биссектрисой угла KHM тогда и только тогда, когда AH, BK и CM пересекаются в одной точке.

4. Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

5. В плоском мире есть два острова, которые имеют форму выпуклых многоугольников. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

6. Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Задачи для 11 класса

1. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

2. Сколько пятизначных чисел делятся на свою последнюю цифру?

3. Точки H, K и M лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, в котором AH является высотой. Докажите, что AH служит биссектрисой угла KHM тогда и только тогда, когда AH, BK и CM пересекаются в одной точке.

4. Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

5. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 1. Через точку M, лежащую на грани ABC (но не на ребре), проведены плоскости, параллельные трём другим граням. Эти плоскости делят тетраэдр на части. Найдите сумму длин рёбер той части, которая содержит точку D.

6. Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.