Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Первый тур

Задачи с решениями

Задачи для 5 класса

1. Петя, Вася и Толик в складчину купили футбольный мяч. Известно, что каждый из них заплатил не больше половины суммы, заплаченной двумя другими. Мяч стоил 9 рублей. Сколько денег заплатил Петя?

   Решение. Ответ: 3 рубля.

   Заметим, что если кто-нибудь из мальчиков заплатил больше трёх рублей, то он потратил больше половины денег, потраченных остальными. Значит, никто не мог заплатить больше трёх рублей. Если же кто-то заплатил не три рубля, а меньше, то сумма будет меньше 9 рублей. Значит, каждый заплатил по 3 рубля.

2. Полина написала на доске два числа A и B. Вика их стерла, записав числа, равные сумме и произведению чисел, записанных Полиной: C и D. Затем Полина стерла числа, записанные Викой, также записав их сумму и произведение: E и F. Из последних двух чисел одно оказалось нечётным. Какое именно и почему?

   Решение. 1. Если числа A и B имеют разную чётность, то их сумма C является нечётным числом, а произведение D — чётным. Тогда E — нечётное число, а F — чётное.

   2. Если числа A и B одновременно чётные, то числа C и D также являются чётными, а значит, и числа E и F одновременно чётные, что противоречит условию.

   3. Если числа A и B одновременно нечётные, то число C — чётное, а число D — нечётное, значит, E — нечётное, а F — чётное. Ответ: E — нечётное число.

3. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B. В классе провели три контрольные работы. Могло ли оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B, ученик B – лучше, чем ученик C, а ученик C – лучше, чем A?

   Решение. Может. Например, так.

	Работа 1	Работа 2	Работа 3
A	5	4	3
B	4	3	5
C	3	5	4

4. По вечерам Лева врёт маме, если в этот день получил двойку, а в остальных случаях говорит правду. А ещё у Левы есть сестра, которой мама дает конфеты в те дни, когда она не получает двоек. Однажды вечером Лёва сказал маме: «Сегодня я получил больше двоек, чем моя сестра». Достанутся ли сестре конфеты?

   Решение. Если предположить, что Лёва не получал двоек, то он должен сказать правду, но тогда из его фразы следует, что он получал двойки — противоречие.

   Значит, Лёва получал двойки. Значит, он сказал неправду. То есть на самом деле его сестра получила не меньше двоек, чем он сам, то есть у неё тоже есть двойки. Значит, сестре конфеты не достанутся.

5. Волшебный календарь показывает правильную дату по чётным числам месяца и неправильную по нечётным. Какое максимальное количество дней подряд он может показывать одну и ту же дату? Укажите все возможные числа месяца, которые он при этом может показывать.

   Решение. Заметим, что в таком промежутке времени должно быть максимум одно чётное число (в разные чётные числа календарь показывает разные даты). В промежутке из 4 и более дней обычно есть хотя бы два чётных числа; исключение составляют только промежутки, содержащие 31 число или 29 февраля. Вот эти промежутки: 27, 28, 29 февраля и 1 марта; 29 февраля, 1, 2, 3 марта; 29, 30, 31, 1; 31, 1, 2, 3. Как видим, чётное число, которое он показывает — 28, 30 или 2.

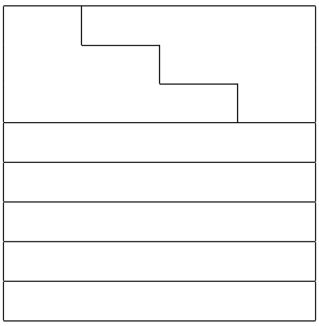
   Ответ: 4 дня; 28-е, 30-е или 2-е число.

6. Сколько существует десятизначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр, а цифры 0, 1, 2, 3 стоят подряд в порядке возрастания?

   Решение. Число должно включать в себя фрагмент 0123. В начале числа он стоять не может, поэтому у него есть 6 возможных позиций (он может начинаться со второй, с третьей, с четвёртой, с пятой, с шестой или с седьмой цифры). В каждом из этих случаев есть $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot = 720$ способов расставить остальные цифры. Итого $720 \cdot 6 = 4320$ способов.

7. Алексей разрезал квадрат 8×8 по границам клеток на 7 частей с равными периметрами. Покажите, как он это сделал (достаточно привести один пример).

   Решение. Например, так (периметр каждой части равен 18):



Задачи для 6 класса

1. По кругу сидят 14 человек. Петя, Вика, Толик и Чингиз сидят подряд, у каждого из них есть по монете: у Пети 1 рубль, у Вики 2 рубля, у Толика 5 рублей, а у Чингиза 10 рублей. У других ребят денег нет. Любой человек из сидящих в кругу может передать свою монету другому, если между ними сидят ровно три человека. Оказалось, что через некоторое время монеты опять оказались у Пети, Вики, Толика и Чингиза. У кого теперь какая монета?

   Решение. Занумеруем ребят цифрами от 1 до 14, начиная с Пети. Пусть он будет первый, Вика вторая и т. д. После каждого шага номер человека, у которого находится монета, изменяется на 4 или на 10, то есть чётность номера не меняется. Таким образом, монеты 1 и 5 рублей могут оказаться только у людей с нечётными номерами, а 2 и 10 — у людей с чётными.

   Теперь нетрудно заметить, что возможно четырьмя способами расположить монеты у Пети, Вики, Толика и Чингиза:

а) у Пети 1 рубль, у Вики 2, у Толика 5, у Чингиза 10;

б) у Пети 1 рубль, у Вики 10, у Толика 5, у Чингиза 2;

в) у Пети 5 рублей, у Вики 2, у Толика 1, у Чингиза 10;

г) у Пети 5 рублей, у Вики 10, у Толика 1, у Чингиза 2.

Покажем, как получить каждый из этих вариантов.

а) Первый (Петя) передаёт свою монету пятому, а тот — опять первому.

б) Монета в 2 рубля переходит от 2-го (Вики) к 6-му, 10-му, 14-му, 4-му (Чингизу); монета в 10 рублей — в обратном направлении (от 4-го к 14-му, 10-му, 6-му, 2-му).

в) Монета в 1 рубль переходит от 1-го (Пети) к 5-му, 9-му, 13-му, 3-му (Толику); монета в 5 рублей — в обратном направлении.

г) Проделываются действия из пункта б), а затем из пункта в).

2. Полина написала на доске два числа A и B. Вика их стерла, записав числа, равные сумме и произведению чисел, записанных Полиной: C и D. Затем Полина стерла числа, записанные Викой, также записав их сумму и произведение: E и F. Из последних двух чисел одно оказалось нечётным. Какое именно и почему?

   Решение: см. задачу 2 для 5 класса.

3. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B. В классе провели три контрольные работы. Могло ли оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B, ученик B – лучше, чем ученик C, а ученик C – лучше, чем A?

   Решение: см. задачу 3 для 5 класса.

4. По вечерам Лева врёт маме, если в этот день получил двойку, а в остальных случаях говорит правду. А ещё у Левы есть сестра, которой мама дает конфеты в те дни, когда она не получает двоек. Однажды вечером Лёва сказал маме: «Сегодня я получил больше двоек, чем моя сестра». Достанутся ли сестре конфеты?

   Решение: см. задачу 4 для 5 класса.

5. Волшебный календарь показывает правильную дату по чётным числам месяца и неправильную по нечётным. Какое максимальное количество дней подряд он может показывать одну и ту же дату? Укажите все возможные числа месяца, которые он при этом может показывать.

   Решение: см. задачу 5 для 5 класса.

6. Сколько существует десятизначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр, а цифры 0, 1, 2, 3 стоят подряд в порядке возрастания или в порядке убывания?

   Решение. Число должно включать в себя фрагмент 0123 или 3210. Фрагмент 0123 не может стоять в начале числа, поэтому у него есть 6 возможных позиций (он может начинаться со второй, с третьей, с четвёртой, с пятой, с шестой или с седьмой цифры). У фрагмента 3210 добавляется начальная позиция, поэтому у него 7 возможных позиций. В сумме получается $7 + 6 = 13$ способов размещения цифр 0, 1, 2, 3. В каждом из этих случаев есть $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot = 720$ способов расставить остальные цифры. Итого $720 \cdot 13 = 9360$ способов.

7. Алексей разрезал квадрат 8×8 по границам клеток на 7 частей с равными периметрами. Покажите, как он это сделал (достаточно привести один пример).

   Решение: см. задачу 7 для 5 класса.

Задачи для 7 класса

1. Волшебный календарь показывает правильную дату по чётным числам месяца и неправильную по нечётным. Какое максимальное количество дней подряд он может показывать одну и ту же дату? Укажите все возможные числа месяца, которые он при этом может показывать.

   Решение: см. задачу 5 для 5 класса.

2. Расставьте в клетках квадрата 5×5 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа 1, 2, 3, 4 и 2015 (повторно их использовать нельзя).

   Решение. Посмотрим на строку и столбец, в которых стоит число 2015. Помимо 2015 там стоят числа не меньшие, чем $5, 6, 7, \ldots, 12$. Таким образом, сумма чисел в каждой строке и столбце не меньше чем $(2015 + 2015 + 5 + 6 + \cdots + 12)/2 = 2049$.

   Пример с суммой 2049:

1	13	24	1999	12
810	2	1206	22	9
19	2001	3	18	8
1208	23	809	4	5
11	10	7	6	2015

3. Алексей разрезал квадрат 8×8 по границам клеток на 7 частей с равными периметрами. Покажите, как он это сделал (достаточно привести один пример).

   Решение: см. задачу 7 для 5 класса.

4. В тараканьих бегах участвуют 27 тараканов. В каждом забеге бегут три таракана. Скорости всех тараканов различны и постоянны в течение всех забегов. После каждого забега мы узнаём, в каком порядке его участники пришли к финишу. Мы хотели бы узнать двух самых быстрых тараканов (в правильном порядке). Хватит ли для этого 14 забегов?

   Решение. Да. Сначала разобьём тараканов на 9 троек и проведём в каждой тройке забег. У этих забегов 9 победителей; разобьём их на тройки и проведём ещё три забега. У новых забегов три победителя; устроив между ними 13-й забег, найдём самого быстрого таракана.

   Остался один забег, чтобы найти второго по скорости таракана. Заметим, что второй таракан — это обязательно один из тех, кто участвовал в одном забеге с самым быстрым и занял в нём второе место. Действительно, если какой-то таракан занял третье место в своём забеге, то он не может быть вторым из всех. Если кто-то занял в забеге вторе место, но при этом его обогнал не самый быстрый из всех тараканов, то этот кто-то также не может быть вторым из всех. Итак, осталось сравнить тех трёх тараканов, которые участвовали в одном забеге с быстрейшим и заняли второе место. Самый быстрый из этих трёх и будет вторым.

5. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B. В классе провели несколько работ (больше трёх). Может ли по их результатам оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B, ученик B – лучше, чем ученик C, а ученик C – лучше, чем A?

   Решение. Может. Например, так.

	Работа 1	Работа 2	Работа 3	Работа 4	Работа 5	Работа 6
A	5	4	3	5	4	3
B	4	3	5	4	3	5
C	3	5	4	3	5	4

6. Натуральное число называется красивым, если оно равно произведению факториалов простых чисел (не обязательно различных). Положительное рациональное число называется практичным, если оно равно отношению двух красивых натуральных чисел. Докажите, что любое положительное рациональное число — практичное.

   Решение. Заметим, что произведение и частное двух практичных чисел являются практичными числами: пусть
   $$x = \frac{a_1! \dots a_k!}{b_1! \dots b_l!}, \quad y = \frac{c_1! \dots c_m!}{d_1! \dots d_n!},$$
   тогда
   $$x \cdot y = \frac{a_1! \dots a_k!\, c_1! \dots c_m!}{b_1! \dots b_l!\, d_1! \dots d_n!}, \quad \frac{x}{y} = \frac{a_1! \dots a_k!\, d_1! \dots d_n!}{b_1! \dots b_l!\, c_1! \dots c_m!}.$$

   Любое рациональное число является отношением двух натуральных, поэтому достаточно доказать, что всякое натуральное число — практичное.

   Докажем это индукцией по n. База: $1 = 2!/2!$ — практичное число. Переход: если n — составное число, то оно равно произведению меньших чисел, про которые уже известно, что они практичны. Если же n простое, то представим его в виде $n = \frac{n!}{(n-1)!}$. Число $(n-1)! = 1 \cdot 2 \dots (n-1)$ является произведением чисел, меньших n, то есть произведением практичных чисел; значит, оно практично. Число $n!$ также практично. Значит, n практично как частное двух практичных чисел.

7. Назовем натуральное число возрастающим, если его цифры идут в порядке строгого возрастания (например, 1589 — возрастающее, а 447 — нет). Какое наименьшее количество возрастающих чисел надо сложить, чтобы получить 2015?

   Решение. Ответ: достаточно трёх чисел (например, $1678 + 168 + 169$).

   Двух чисел мало. Пусть их два, одно из них четырёхзначное, другое (легко видеть) трёхзначное. Итак, $\overline{1abc} + \overline{def} = 2015$. Ясно, что $c + f \neq 5$ (иначе $a + d < 5$, и сумма чисел меньше 1600), то есть $c + f = 15$. Тогда $b + e = 10$ и $a + d = 9$. Но это противоречит строгому возрастанию ($b + e$ должно превышать $a + d$ хотя бы на 2).

Задачи для 8 класса

1. Расставьте в клетках квадрата 5×5 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа 1, 2, 3, 4 и 2015 (повторно их использовать нельзя).

   Решение: см. задачу 2 для 7 класса.

2. В тараканьих бегах участвуют 27 тараканов. В каждом забеге бегут три таракана. Скорости всех тараканов различны и постоянны в течение всех забегов. После каждого забега мы узнаём, в каком порядке его участники пришли к финишу. Мы хотели бы узнать двух самых быстрых тараканов (в правильном порядке). Хватит ли для этого 14 забегов?

   Решение: см. задачу 4 для 7 класса.

3. Найдите хотя бы одно натуральное число, произведение натуральных делителей которого равно 10^{90}.

   Решение. Очевидно, что простые делители искомого числа — только 2 и 5, то есть искомое число равно 2^a5^b. Делители числа имеют вид 2^x5^y, где $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant y \leqslant b$. Тогда в произведение делителей 2 входит в степени $(b+1)(0+1+2+\dots+a) = (b+1)a(a+1)/2$, а 5 в степени $(a+1)(0+1+\dots b) = (a+1)b(b+1)/2$. Отсюда делаем вывод, что $a = b$.

   Получаем уравнение $a(a+1)^2/2 = 90$, откуда $a = 5$. Таким образом, искомое число только одно: это $2^5 \cdot 5^5 = 10^5$.

   Ответ: 100000.

   Замечание. Для решения задачи достаточно привести число 100000 и показать, что произведение его делителей действительно равно 10^90; доказывать его единственность не требуется.

4. У Васи есть 12 палочек, длина каждой из которых — натуральное число, не превосходящее 56. Докажите, что из каких-то трёх палочек можно сложить треугольник.

   Решение. Упорядочим длины палочек по возрастанию: пусть они равны $a_1, \dots, a_12$, причём $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \dots \leqslant a_{12}$. Заметим, что если $a_k < a_{k-1} + a_{k-2}$ при каком-либо k, то из палочек длиной a_k, a_{k+1}, a_{k+2} можно сложить треугольник. Поэтому $a_k \geqslant a_{k-1} + a_{k-2}$.

   Поскольку $a_1 \geqslant 1$ и $a_2 \geqslant 1$, то получаем: $a_3 \geqslant 2$, $a_4 \geqslant 3$, $a_5 \geqslant 5$, $a_6 \geqslant 8$, $a_7 \geqslant 13$, $a_8 \geqslant 21$, $a_9 \geqslant 34$, $a_{10} \geqslant 55$, $a_{11} \geqslant 89$, $a_{12} \geqslant 144$ — противоречие.

   Замечание. Числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... называются *числами Фибоначчи.*

5. Натуральное число называется красивым, если оно равно произведению факториалов простых чисел (не обязательно различных). Положительное рациональное число называется практичным, если оно равно отношению двух красивых натуральных чисел. Докажите, что любое положительное рациональное число — практичное.
   Решение: см. задачу 6 для 7 класса.

6. В треугольнике ABC угол B равен $30°$, а угол C равен $105°$. Точка D — середина стороны BC. Найдите угол BAD.

   Решение. 1. Пусть CE — высота $\triangle ACB$, тогда $BD = DC = DE = x$ (медиана прямоугольного треугольника BCE, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы).

   2. $CE = CB/2 = x$ как катет прямоугольного треугольника с углом $30°$.

   3. Поскольку $\angle CAE = 180° - 105° - 30° = 45°$ и $\angle CEA = 90°$, то треугольник CAE — прямоугольный равнобедренный, и $AE = CE = x$.

   4. $\angle CED = 60°$ (угол равностороннего треугольника CDE), поэтому $\angle AED = 90° + 60° = 150°$.

   5. Искомый угол EAD — угол при основании равнобедренного треугольника AED, поэтому он равен $(180° - 150°)/2 = 15°$.

   Ответ: $15°$.

7. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B. В классе провели несколько работ (больше трёх). Может ли по их результатам оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B, ученик B – лучше, чем ученик C, а ученик C – лучше, чем A?
   Решение: см. задачу 5 для 7 класса.

Задачи для 9 класса

1. Вершины правильного 12-угольника покрашены в красный и синий цвета. Известно, что если выбрать любые три вершины, образующие равносторонний треугольник, то как минимум две из них окрашены в красный цвет. Докажите, что найдётся квадрат, как минимум три вершины которого красные.

   Решение. Заметим, что 12 вершин правильного 12-угольника можно разбить как на четыре тройки, каждая из которых образует правильный треугольник, так и на три четвёрки, каждая из которых образует квадрат. У каждого из четырёх треугольников не меньше двух красных вершин, поэтому всего красных точек не меньше восьми. Но тогда, по принципу Дирихле, один из трёх квадратов должен иметь хотя бы три красных вершины.

2. Натуральное число называется красивым, если оно равно произведению факториалов простых чисел (не обязательно различных). Положительное рациональное число называется практичным, если оно равно отношению двух красивых натуральных чисел. Докажите, что любое положительное рациональное число — практичное.

   Решение: см. задачу 6 для 7 класса.

3. В тараканьих бегах участвуют 27 тараканов. В каждом забеге бегут три таракана. Скорости всех тараканов различны и постоянны в течение всех забегов. После каждого забега мы узнаём, в каком порядке его участники пришли к финишу. Мы хотели бы узнать двух самых быстрых тараканов (в правильном порядке). Хватит ли для этого 14 забегов?

   Решение: см. задачу 4 для 7 класса.

4. В треугольнике ABC угол B равен $30°$, а угол C равен $105°$. Точка D — середина стороны BC. Найдите угол BAD.

   Решение: см. задачу 6 для 8 класса.

5. У Васи есть 12 палочек, длина каждой из которых — натуральное число, не превосходящее 56. Докажите, что из каких-то трёх палочек можно сложить треугольник.

   Решение: см. задачу 4 для 8 класса.

6. Найдите хотя бы одно натуральное число, произведение натуральных делителей которого равно 10^{90}.

   Решение: см. задачу 3 для 8 класса.

7. Хорошо известно, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А существует ли 2015 последовательных натуральных чисел, таких что сумма квадратов первых 1008 из них равна сумме квадратов последних 1007?

   Решение. Это частный случай задачи 7 для 10 класса (см. ниже).

   Ответ: существуют.

Задачи для 10 класса

1. Багз Банни и Кролик Роджер поспорили, кто из них быстрее прыгает. Чтобы выяснить это, они решили провести соревнование: каждый должен прыжками преодолеть 50-метровую дистанцию, затем развернуться и вернуться к месту старта. Известно, что Багз Банни прыгает на 50 см, а Роджер на 60 см, но за то время, за которое Багз делает 6 прыжков, Роджер делает 5. Кто же из кроликов финиширует первым?

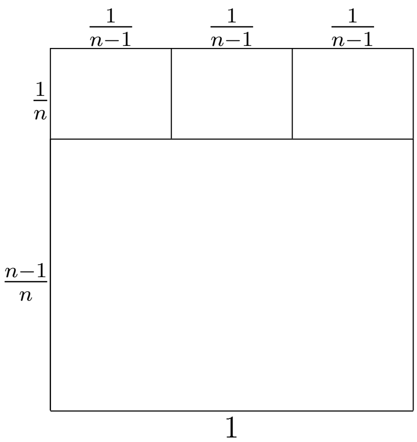
   Решение. Заметим, что скорость движения кроликов одинакова. Однако Багз Банни пропрыгает по 50 метров в каждую сторону, а Роджер — по 50 м 40 см (это наименьшее расстояние, которое не меньше 50 метров и кратно длине его прыжка). Поэтому Багз Банни выиграет.

2. При каких n можно разрезать квадрат на n подобных прямоугольников, не все из которых равны?

   Решение. Будем считать сторону исходного квадрата равной 1.

   При $n = 2$ так разрезать квадрат нельзя: прямоугольники будут иметь размеры $1 \times a$ и $1 \times (1 - a)$, и подобны они могут быть только при $1 - a = a$, но в этом случае они равны. При $n = 1$, очевидно, это тоже нельзя сделать.

   При всех целых $n \geqslant 3$ указанное разрезание возможно. Пример приведён на рисунке.



3. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + 2015, b + 2016)$?

   Решение. Да, существуют. Попробуем подобрать числа такие, что $b = a + 2015$, это логично, потому что тогда в наших НОКах будет совпадать хотя бы одно число. Тогда нам нужно, чтобы выполнялось равенство $\text{НОК}(b - 2015, b) = \text{НОК}(b, b + 2016)$. Попробуем взять b такое, что $b + 2016 = 2 \cdot (b - 2015)$, то есть $b = 2 \cdot 2015 + 2016$.

   Проверяем: $\text{НОК}(4031, 6046) = \text{НОК}(29 \cdot 139, 2 \cdot 3023) = 2 \cdot 29 \cdot 139 \cdot 3023 = \text{НОК}(6046, 8046)$.

4. В треугольнике ABC угол B равен $30°$, а угол C равен $105°$. Точка D — середина стороны BC. Найдите угол BAD.

   Решение: см. задачу 6 для 8 класса.

5. Расставьте в клетках квадрата 10×10 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 2015 (повторно их использовать нельзя).

   Решение. Заметим, что в последней строке и в последнем столбце, помимо числа 2015, стоят ещё 18 чисел, самое маленькое из которых не меньше 10. Поэтому сумма чисел в последней строке плюс сумма чисел в последнем столбце не меньше, чем $2 \cdot 2015 + (10 + \ldots + 27) = 4030 + 37 \cdot 9 = 4363$. Значит, сумма в каждом ряду не меньше $4363/2$, то есть не меньше 2182 (поскольку она целая).

   Добиться ответа 2182 возможно, например, так:

1	860	871	100	109	70	72	46	42	11
872	2	866	96	104	68	74	48	40	12
864	876	3	94	102	66	76	50	38	13
105	103	101	4	1624	64	78	52	36	15
91	93	95	1647	5	62	82	54	34	19
81	79	77	75	73	6	1683	56	32	20
69	67	65	63	61	1739	7	58	30	23
44	41	39	35	33	31	29	8	1896	26
45	47	49	51	53	55	59	1786	9	28
10	14	16	17	18	21	22	24	25	2015

Чтобы получить эту таблицу, нужно разбить числа $10, 11, \ldots, 25, 26, 28$ на две группы по девять чисел с равными суммами, одну из групп разместить в нижней строке, другую — в правом столбце. Дальше можно заполнить шесть строк и шесть столбцов более или менее произвольным образом. После этого останется шесть свободных клеток в трёх столбцах и трёх строках. Это задаёт систему из шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую, получаем ответ.

6. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и AC треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите неравенство:

$$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$

Решение. Обозначим отрезки $AB_1 = AC_1 = x$, $CB_1 = CA_1 = z$, $BC_1 = BA_1 = y$ (они соответственно равны, так как это отрезки касательных из одной точки к окружности). Тогда $AC = x + z$, $BC = y + z$, $AB = x + y$ и наше неравенство можно переписать как

$$\frac{x+z}{x} + \frac{y+z}{z} + \frac{x+y}{y} > 4.$$

Выделим целые части в дробях и сократим их с правой частью:

$$1 + \frac{z}{x} + 1 + \frac{y}{z} + 1 + \frac{x}{y} > 4,$$

$$\frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y} > 1.$$

Докажем последнее неравенство. Заметим, что x, y, z — положительные числа. Допустим, $z \geqslant x$, тогда $\frac{z}{x} \geqslant 1$ и неравенство доказано. Аналогично, неравенство очевидно верно в случаях, когда у $\geqslant z$ и $x \geqslant y$. Но одно из этих трёх неравенств обязательно выполняется, потому что если $z < x$ и $x < y$, то y не может быть меньше z.

7. Хорошо известно, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А для любого ли натурального k существуют $2k + 1$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма квадратов первых $k + 1$ из них равна сумме квадратов последних k?

Решение. Попробуем для каждого k найти такой набор чисел. Обозначим среднее из них через a, тогда получится, что это числа $a - k, \ldots, a + k$. По условию,

$$(a-k)^2 + \ldots + (a-1)^2 + a^2 = (a+1)^2 + \ldots + (a+k)^2.$$

Раскроем скобки и сгруппируем коэффициенты при равных степенях a:

$$(k+1)a^2 - 2(k + (k-1) + \ldots + 2 + 1)a + (k^2 + (k-1)^2 + \ldots + 1^2) =$$
$$= ka^2 + 2(k + (k-1) + \ldots + 2 + 1)a + (k^2 + (k-1)^2 + \ldots + 1^2).$$

Перенесём всё в левую часть:

$$a^2 - 4(k + (k-1) + \ldots + 2 + 1)a = 0.$$

Отсюда следует, что $a = 0$ или $a = 4(k + (k-1) + \ldots + 2 + 1)$. Вторую из этих формул можно упростить до $a = 2k(k+1)$, просуммировав арифметическую прогрессию При $a = 0$ некоторые из чисел набора отрицательны, так что этот случай не удовлетворяет условию. Зато во втором случае все числа в наборе положительны, поскольку $2k(k+1) > k$. Итак, мы нашли набор натуральных чисел, при котором выполняется требуемое равенство.

Ответ: да.

Задачи для 11 класса

1. Багз Банни и Кролик Роджер поспорили, кто из них быстрее прыгает. Чтобы выяснить это, они решили провести соревнование: каждый должен прыжками преодолеть 50-метровую дистанцию, затем развернуться и вернуться к месту старта. Известно, что Багз Банни прыгает на 50 см, а Роджер на 60 см, но за то время, за которое Багз делает 6 прыжков, Роджер делает 5. Кто же из кроликов финиширует первым?

   Решение: см. задачу 1 для 10 класса.

2. При каких n можно разрезать квадрат на n подобных прямоугольников, не все из которых равны?

   Решение: см. задачу 2 для 10 класса.

3. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + 2015, b + 2016)$?

   Решение: см. задачу 3 для 10 класса.

4. В треугольнике ABC угол B равен $30°$, а угол C равен $105°$. Точка D — середина стороны BC. Найдите угол BAD.

   Решение: см. задачу 6 для 8 класса.

5. В каждой целочисленной точке плоскости растёт дерево диаметром 10^{-6}. Дровосек срубил дерево, стоящее в точке $(0, 0)$, и встал в центр пенька. Ограничена ли часть плоскости, которую он сумеет увидеть? Считайте каждое дерево бесконечной цилиндрической колонной, ось симметрии которой проходит через целочисленную точку плоскости.

   Решение. Докажем, что видимая часть плоскости содержится в квадрате с центром $(0, 0)$ и стороной 10^7.

   Испустим из начала координат луч и докажем, что он пройдёт через какое-нибудь дерево, растущее в пределах этого квадрата. Не умаляя общности можно считать, что луч пересекает верхнюю часть правой стороны квадрата, то есть задаётся уравнением $y = kx$ при $x > 0$, где коэффициент $k \in (0; 1)$. Тогда луч проходит через точки $(1, k), (2, 2k), \ldots, (3 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6 k), \ldots$, лежащие внутри квадрата. Если хотя бы одно из чисел $k, 2k, \ldots, 3 \cdot 10^6 k$ отличается от целого числа менее чем на $10^{-6}/2$, то соответствующая точка лежит внутри дерева, и часть луча, находящуюся за ней, дровосек не может увидеть.

   Рассмотрим дробные части этих чисел: пусть $a_i = \{i \cdot k\}$, $i = 1, \ldots, 3 \cdot 10^6$. Тогда все числа a_i лежат на отрезке $[0; 1)$, поэтому найдутся два из них, a_l и a_m $(l < m)$, с разностью, меньшей $10^{-6}/2$ (в том числе, возможно, совпадающие). Из этого следует, что $(m - l)k$ отличается от целого числа менее чем на $10^{-6}/2$, то есть точка $(m - l, (m - l)k)$ лежит внутри дерева.

6. Приведите пример четырёх положительных чисел, которые не могут служить радиусами четырёх попарно касающихся сфер.

   Решение. Например, 1, 1, 1, 1/100. Центры трёх сфер радиуса 1 образуют правильный треугольник ABC со стороной 2. Центр D четвёртой сферы должен быть удалён от каждой из точек A, B, C на 1,01. Невозможность этого очевидна, но докажем её строго. Пусть D' — проекция D на плоскость ABC. Тогда из равенства $DA = DB = DC$ следует равенство $D'A = D'B = D'C$ (это катеты прямоугольных треугольников, вторым катетом каждого из них является DD', а гипотенузами — DA, DB, DC). Значит, D' — центр описанной окружности $\triangle ABC$. Но тогда $D'A > 1{,}01$, а DA ещё больше.

7. Хорошо известно, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А для любого ли натурального k существуют $2k + 1$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма квадратов первых $k + 1$ из них равна сумме квадратов последних k?

   Решение: см. задачу 7 для 10 класса.