Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 5 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Петя, Вася и Толик в складчину купили футбольный мяч. Известно, что каждый из них заплатил не больше половины суммы, заплаченной двумя другими. Мяч стоил 9 рублей. Сколько денег заплатил Петя?

2. Полина написала на доске два числа A и B. Вика их стерла, записав числа, равные сумме и произведению чисел, записанных Полиной: C и D. Затем Полина стерла числа, записанные Викой, также записав их сумму и произведение: E и F. Из последних двух чисел одно оказалось нечётным. Какое именно и почему?

3. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B. В классе провели три контрольные работы. Могло ли оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B, ученик B – лучше, чем ученик C, а ученик C – лучше, чем A?

4. По вечерам Лева врёт маме, если в этот день получил двойку, а в остальных случаях говорит правду. А ещё у Левы есть сестра, которой мама дает конфеты в те дни, когда она не получает двоек. Однажды вечером Лёва сказал маме: «Сегодня я получил больше двоек, чем моя сестра». Достанутся ли сестре конфеты?

5. Волшебный календарь показывает правильную дату по чётным числам месяца и неправильную по нечётным. Какое максимальное количество дней подряд он может показывать одну и ту же дату? Укажите все возможные числа месяца, которые он при этом может показывать.

6. Сколько существует десятизначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр, а цифры 0, 1, 2, 3 стоят подряд в порядке возрастания?

7. Алексей разрезал квадрат 8×8 по границам клеток на 7 частей с равными периметрами. Покажите, как он это сделал (достаточно привести один пример).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 6 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. По кругу сидят 14 человек. Петя, Вика, Толик и Чингиз сидят подряд, у каждого из них есть по монете: у Пети 1 рубль, у Вики 2 рубля, у Толика 5 рублей, а у Чингиза 10 рублей. У других ребят денег нет. Любой человек из сидящих в кругу может передать свою монету другому, если между ними сидят ровно три человека. Оказалось, что через некоторое время монеты опять оказались у Пети, Вики, Толика и Чингиза. У кого теперь какая монета?

2. Полина написала на доске два числа A и B. Вика их стерла, записав числа, равные сумме и произведению чисел, записанных Полиной: C и D. Затем Полина стерла числа, записанные Викой, также записав их сумму и произведение: E и F. Из последних двух чисел одно оказалось нечётным. Какое именно и почему?

3. Считается, что ученик А учится лучше ученика В, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика А выше, чем у ученика В. В классе провели три контрольные работы. Могло ли оказаться, что ученик А учится лучше, чем ученик В, ученик В – лучше, чем ученик С, а ученик С – лучше, чем А?

4. По вечерам Лева врёт маме, если в этот день получил двойку, а в остальных случаях говорит правду. А ещё у Левы есть сестра, которой мама дает конфеты в те дни, когда она не получает двоек. Однажды вечером Лёва сказал маме: «Сегодня я получил больше двоек, чем моя сестра». Достанутся ли сестре конфеты?

5. Волшебный календарь показывает правильную дату по чётным числам месяца и неправильную по нечётным. Какое максимальное количество дней подряд он может показывать одну и ту же дату? Укажите все возможные числа месяца, которые он при этом может показывать.

6. Сколько существует десятизначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр, а цифры 0, 1, 2, 3 стоят подряд в порядке возрастания или в порядке убывания?

7. Алексей разрезал квадрат 8×8 по границам клеток на 7 частей с равными периметрами. Покажите, как он это сделал (достаточно привести один пример).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 7 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Волшебный календарь показывает правильную дату по чётным числам месяца и неправильную по нечётным. Какое максимальное количество дней подряд он может показывать одну и ту же дату? Укажите все возможные числа месяца, которые он при этом может показывать.

2. Расставьте в клетках квадрата 5×5 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа 1, 2, 3, 4 и 2015 (повторно их использовать нельзя).

3. Алексей разрезал квадрат 8×8 по границам клеток на 7 частей с равными периметрами. Покажите, как он это сделал (достаточно привести один пример).

4. В тараканьих бегах участвуют 27 тараканов. В каждом забеге бегут три таракана. Скорости всех тараканов различны и постоянны в течение всех забегов. После каждого забега мы узнаём, в каком порядке его участники пришли к финишу. Мы хотели бы узнать двух самых быстрых тараканов (в правильном порядке). Хватит ли для этого 14 забегов?

5. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B. В классе провели несколько работ (больше трёх). Может ли по их результатам оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B, ученик B – лучше, чем ученик C, а ученик C – лучше, чем A?

6. Натуральное число называется красивым, если оно равно произведению факториалов простых чисел (не обязательно различных). Положительное рациональное число называется практичным, если оно равно отношению двух красивых натуральных чисел. Докажите, что любое положительное рациональное число — практичное.

7. Назовем натуральное число возрастающим, если его цифры идут в порядке строгого возрастания (например, 1589 — возрастающее, а 447 — нет). Какое наименьшее количество возрастающих чисел надо сложить, чтобы получить 2015?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 8 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Расставьте в клетках квадрата 5×5 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа 1, 2, 3, 4 и 2015 (повторно их использовать нельзя).

2. В тараканьих бегах участвуют 27 тараканов. В каждом забеге бегут три таракана. Скорости всех тараканов различны и постоянны в течение всех забегов. После каждого забега мы узнаём, в каком порядке его участники пришли к финишу. Мы хотели бы узнать двух самых быстрых тараканов (в правильном порядке). Хватит ли для этого 14 забегов?

3. Найдите хотя бы одно натуральное число, произведение натуральных делителей которого равно 10^{79}.

4. У Васи есть 12 палочек, длина каждой из которых — натуральное число, не превосходящее 56. Докажите, что из каких-то трёх палочек можно сложить треугольник.

5. Натуральное число называется красивым, если оно равно произведению факториалов простых чисел (не обязательно различных). Положительное рациональное число называется практичным, если оно равно отношению двух красивых натуральных чисел. Докажите, что любое положительное рациональное число — практичное.

6. В треугольнике ABC угол B равен $30°$, а угол C равен $105°$. Точка D — середина стороны BC. Найдите угол BAD.

7. Считается, что ученик A учится лучше ученика B, если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B. В классе провели несколько работ (больше трёх). Может ли по их результатам оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B, ученик B – лучше, чем ученик C, а ученик C – лучше, чем A?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 9 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Вершины правильного 12-угольника покрашены в красный и синий цвета. Известно, что если выбрать любые три вершины, образующие равносторонний треугольник, то как минимум две из них окрашены в красный цвет. Докажите, что найдётся квадрат, как минимум три вершины которого красные.

2. Натуральное число называется красивым, если оно равно произведению факториалов простых чисел (не обязательно различных). Положительное рациональное число называется практичным, если оно равно отношению двух красивых натуральных чисел. Докажите, что любое положительное рациональное число — практичное.

3. В тараканьих бегах участвуют 27 тараканов. В каждом забеге бегут три таракана. Скорости всех тараканов различны и постоянны в течение всех забегов. После каждого забега мы узнаём, в каком порядке его участники пришли к финишу. Мы хотели бы узнать двух самых быстрых тараканов (в правильном порядке). Хватит ли для этого 14 забегов?

4. В треугольнике ABC угол B равен $30°$, а угол C равен $105°$. Точка D — середина стороны BC. Найдите угол BAD.

5. У Васи есть 12 палочек, длина каждой из которых — натуральное число, не превосходящее 56. Докажите, что из каких-то трёх палочек можно сложить треугольник.

6. Найдите хотя бы одно натуральное число, произведение натуральных делителей которого равно 10^{79}.

7. Хорошо известно, что $3^2+4^2=5^2$. Менее известно, что $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$. А существует ли 2015 последовательных натуральных чисел, таких что сумма квадратов первых 1008 из них равна сумме квадратов последних 1007?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 10 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Багз Банни и Кролик Роджер поспорили, кто из них быстрее прыгает. Чтобы выяснить это, они решили провести соревнование: каждый должен прыжками преодолеть 50-метровую дистанцию, затем развернуться и вернуться к месту старта. Известно, что Багз Банни прыгает на 50 см, а Роджер на 60 см, но за то время, за которое Багз делает 6 прыжков, Роджер делает 5. Кто же из кроликов финиширует первым?

2. При каких n можно разрезать квадрат на n подобных прямоугольников, не все из которых равны?

3. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + 2015, b + 2016)$?

4. В треугольнике ABC угол B равен $30°$, а угол C равен $105°$. Точка D — середина стороны BC. Найдите угол BAD.

5. Расставьте в клетках квадрата 10×10 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 2015 (повторно их использовать нельзя).

6. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и AC треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите неравенство:
$$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$

7. Хорошо известно, что $3^2+4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А для любого ли натурального k существуют $2k + 1$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма квадратов первых $k + 1$ из них равна сумме квадратов последних k?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 11 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Багз Банни и Кролик Роджер поспорили, кто из них быстрее прыгает. Чтобы выяснить это, они решили провести соревнование: каждый должен прыжками преодолеть 50-метровую дистанцию, затем развернуться и вернуться к месту старта. Известно, что Багз Банни прыгает на 50 см, а Роджер на 60 см, но за то время, за которое Багз делает 6 прыжков, Роджер делает 5. Кто же из кроликов финиширует первым?

2. При каких n можно разрезать квадрат на n подобных прямоугольников, не все из которых равны?

3. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + 2015, b + 2016)$?

4. В треугольнике ABC угол B равен $30°$, а угол C равен $105°$. Точка D — середина стороны BC. Найдите угол BAD.

5. В каждой целочисленной точке плоскости растёт дерево диаметром 10^{-6}. Дровосек срубил дерево, стоящее в точке $(0, 0)$, и встал в центр пенька. Ограничена ли часть плоскости, которую он сумеет увидеть? Считайте каждое дерево бесконечной цилиндрической колонной, ось симметрии которой проходит через целочисленную точку плоскости.

6. Приведите пример четырёх положительных чисел, которые не могут служить радиусами четырёх попарно касающихся сфер.

7. Хорошо известно, что $3^2+4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А для любого ли натурального k существуют $2k + 1$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма квадратов первых $k + 1$ из них равна сумме квадратов последних k?