Olimpiada Internațională de Matematică

“Formula of Unity”/ “The Third Millennium”

Anul 2014/2015 Runda I

Clasa R5

Vă rugăm să justificați răspunsurile date.

1. O lună dintr-un an o vom numi “lună grea” dacă ea conține exact 5 zile de luni , luni fiind prima zi dintr-o săptămână . Câte “luni grele” pot fi într-un an?

2. Înmulțind două numere naturale consecutive, Andrei a obținut ca rezultat un număr natural de două cifre deasemenea consecutive. Determinați toate aceste numere .

3. Alex și Ben se joacă în timpul orei de istorie. Alex a deschis manualul său la pagina 25 și a tăiat toate cuvintele care nu conțineau litera A, apoi a tăiat toate cuvintele care nu conțineau litera B și în final a tăiat toate cuvintele care conțineau ambele litere A și O. Ben a deschis și el manualul său la aceeași pagină și a tăiat toate cuvintele care nu conțineau litera B dar conțineau litera A sau litera O (posibil și ambele litere A și O) și după aceasta, el a tăiat toate cuvintele care nu aveau nici litera A și nici litera O. Este posibil ca Ben să fi tăiat mai multe cuvinte decât Alex?

4. Se consideră două clase având câte 30 de elevi fiecare. Numărul băieților din prima clasă este de două ori mai mare decât numărul băieților din cea de-a doua clasă în timp ce numărul fetelor din prima clasă este de trei ori mai mic decât numărul fetelor din a doua clasă. Câte fete și câți băieți sunt în fiecare din cele două clase?

5. Trei stilouri, patru creioane și o riglă costă 26 de dolari. Cinci stilouri, șase creioane și trei rigle costă 44 de dolari. Cât costă două stilouri și trei creioane?

6. Inițial, numărul 1 este scris pe tablă. Următoarele operații sunt permise: să înmulțim numărul cu 3 sau să rearanjăm cifrele numărului . Este posibil ca după câteva asemenea operații să obținem numărul 999 ?

Olimpiada Internațională de Matematică

“Formula of Unity”/ “The Third Millennium”

Anul 2014/2015 Runda I

Clasa a R6

Vă rugăm să justificați răspunsurile date.

1. O lună dintr-un an o vom numi “lună grea” dacă ea conține exact 5 zile de luni , luni fiind prima zi dintr-o săptămână . Câte “luni grele” pot fi într-un an?

2. Înmulțind două numere naturale consecutive, Andrei a obținut ca rezultat un număr natural de două cifre deasemenea consecutive. Determinați toate aceste numere.

3. Alex și Ben se joacă în timpul orei de istorie. Alex a deschis manualul său la pagina 25 și a tăiat toate cuvintele care nu conțineau litera A, apoi a tăiat toate cuvintele care nu conțineau litera B și în final a tăiat toate cuvintele care conțineau ambele litere A și O. Ben a deschis și el manualul său la aceeași pagină și a tăiat toate cuvintele care nu conțineau litera B dar conțineau litera A sau litera O (posibil și ambele litere A și O) și după aceasta, el a tăiat toate cuvintele care nu aveau nici litera A și nici litera O. Este posibil ca Ben să fi tăiat mai multe cuvinte decât Alex?

4. Se consideră două clase având câte 30 de elevi fiecare. Numărul băieților din prima clasă este de două ori mai mare decât numărul băieților din cea de-a doua clasă în timp ce numărul fetelor din prima clasă este de trei ori mai mic decât numărul fetelor din a doua clasă. Câte fete și câți băieți sunt în fiecare din cele două clase?

5. Trei stilouri, patru creioane și o riglă costă 26 de dolari. Cinci stilouri, șase creioane și trei rigle costă 44 de dolari. Câți dolari ar trebui să avem pentru a putea cumpăra două stilouri și trei creioane?

6. Inițial, numărul 1 este scris pe tablă. Următoarele operații sunt permise: să înmulțim numărul cu doi sau să rearanjăm cifrele numărului . Este posibil ca după câteva asemenea operații să obținem numărul 209 ?

Olimpiada Internațională de Matematică

“Formula of Unity”/ “The Third Millennium”

Anul 2014/2015 Runda I

Clasa R7

Vă rugăm să justificați răspunsurile date.

1. O lună dintr-un an o vom numi “lună grea” dacă ea conține exact 5 zile de luni, luni fiind prima zi dintr-o săptămână. Câte “luni grele” pot fi într-un an?

2. Înmulțind două numere naturale consecutive, Andrei a obținut ca rezultat un număr natural de două cifre deasemenea consecutive. Determinați toate aceste numere.

3. Suma a trei numere întregi pozitive este 100. Care este cea mai mică valoare posibilă a celui mai mic multiplu comun al lor?

4. Numerele $1,2,\ldots\ ,10$ sunt așezate pe un cerc într-o ordine oarecare. Arătați că totdeauna vor exista trei numere vecine pe cerc a căror sumă să nu fie mai mică decât 18.

5. Trei stilouri, patru creioane și o riglă costă 26 de dolari. Cinci stilouri, șase creioane și trei rigle costă 44 de dolari. Cât costă două stilouri și trei creioane?

6. Aflați cel mai mic număr întreg pozitiv care începe cu 11 și este divizibil cu 7. Demonstrați că numărul găsit este într-adevăr cel mai mic posibil.

Olimpiada Internațională de Matematică "Formula of Unity"/ "The Third Millennium"

Anul 2014/2015 Runda I Clasa R8

1. Arătați că pentru orice număr natural $n > 3$ există un poligon cu n laturi care are proprietatea că orice două diagonale ale sale nu sunt paralele.

2. Fie $[BK]$ bisectoarea triunghiului ABC. Dacă $AB = AC$ și $= AK + BK$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

3. Trei muncitori A, B, C sapă un șanț. Muncind singuri, fiecare dintre muncitori ar termina șanțul într-un număr întreg de zile. Muncind împreună ei ar termina cu 2,5 și 10 zile mai puțin decât dacă doar doi dintre ei ar munci împreună, în absența lui A, B și respectiv C. Câte zile i-ar fi necesare celui mai lent dintre muncitori ca să termine de săpat șanțul dacă el ar munci singur ?

4. Se dau 15 numere compuse mai mici sau egale cu 2014. Arătați că există printre ele două numere având cel mai mare divizor comun al lor mai mare decât 1.

5. Se consideră un pătrat format din 100×100 pătrățele. Se îndepărtează un pătrățel dintr-un colț al pătratului considerat. Este posibil sa tăiem figura rămasă în 33 de figuri de arii egale și de perimetre deasemenea egale? Este permisă doar tăierea de-a lungul laturilor pătrățelelor.

6. În mijlocul unui număr oarecare de șase cifre se inserează semnul înmulțirii. Rezultatul înmulțirii celor două numere de trei cifre astfel obținute este de 7 ori mai mic decât numărul inițial. Aflați numărul inițial.

7. Se consideră N^2 carduri identice de formă pătrată. Fiecare card are înscris doar pe una din fețe un număr și nu există două carduri având înscrise pe ele același număr. Cardurile sunt așezate cu fețele nescrise în sus într-un pătrat de dimensiune $N \times N$. Este permis să întorci pe partea cealaltă orice card din pătratul $N \times N$. Arătați că totdeauna este posibil să găsești un card având înscris pe el numărul cel mai mic dintre toate numerele înscrise pe cardurile vecine lui, utilizând cel mult $8N$ întoarceri. (Două carduri se consider vecine dacă au o latură comună).

8. Un număr întreg pozitiv îl vom numi "crescător" dacă fiecare din cifrele sale este mai mare decât cifra precedentă (de exemplu 7 și 3579 sunt „crescătoare" dar 2447 nu este). Care este numărul minim de numere "crescătoare" a căror sumă este 2014?

9. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi pozitive ecuația $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014.$

10. Măsurile unghiurilor B și C ale triunghiului ABC sunt 30^0 și respectiv 105^0 iar P este mijlocul lui $[BC]$. Care este măsura unghiului ?

Olimpiada Internațională de Matematică "Formula of Unity"/ "The Third Millennium"

Anul 2014/2015 Runda I Clasa R9

1. Arătați că pentru orice număr natural $n > 3$ există un poligon cu n laturi care are proprietatea că orice două diagonale ale sale nu sunt paralele.

2. Suma a trei numere întregi pozitive este 100. Care este cea mai mică valoare posibilă a celui mai mic multiplu comun al lor?

3. Trei muncitori A, B, C sapă un șanț. Muncind singuri, fiecare dintre muncitori ar termina șanțul într-un număr întreg de zile. Muncind împreună ei ar termina cu 2,5 și 10 zile mai puțin decât dacă doar doi dintre ei ar munci împreună, în absența lui A, B și C respectiv. Câte zile i-ar fi necesare celui mai lent dintre muncitori ca să termine de săpat șanțul dacă el ar munci singur ?

4. Andrei a înmulțit două numere naturale consecutive și a obținut ca rezultat un număr care într-o anumită bază de numerație se scrie ca număr două cifre consecutive, fiecare cifră nefiind mai mare decât 9 . Determinați toate aceste numere.

5. Se consideră un pătrat format din 100×100 pătrățele. Se îndepărtează un pătrățel dintr-un colț al pătratului dat. Este posibil sa tăiem figura rămasă în 33 de figuri de arii egale și de perimetre deasemenea egale? Este permisă doar tăierea de-a lungul laturilor pătrățelelor.

6. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$.

7. Se consideră o tablă având 30×30 pătrățele. Ana plasează în pătrățele 162 de semne "plus" și 144 de semne "minus" (unele pătrățele rămân necompletate) dar nu mai mult de 17 semne pe fiecare rând sau coloană. Pentru fiecare "plus" Ben calculează numărul de "minusuri" din acel rând iar pentru fiecare "minus", Ben calculează numărul de "plusuri" din acea coloană. Care este valoarea maximă a sumei tuturor numerelor calculate de Ben?

8. Se consideră triunghiul ABC și punctul D pe latura (AB) astfel încât $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ABC$. Fie S centrul cercului circumscris ΔBCD și P mijlocul segmentului (BD). Arătați că punctele A, C, S și P sunt conciclice.

9. În triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ avem

$$sinA = cosA_1, \qquad sinB = cosB_1, \qquad sinC = \cos C_1.$$

   Aflați toate valorile posibile ale celui mai mare dintre aceste șase unghiuri.

10. Se consideră triunghiul ABC și un punct H în interiorul său astfel încât $\sphericalangle HAB \equiv \sphericalangle HCB$ și $\sphericalangle HBC \equiv HAC$. Arătați că H este ortocentrul triunghiului ABC.

Olimpiada Internațională de Matematică "Formula of Unity"/ "The Third Millennium"

Anul 2014/2015 Runda I Clasa R10

1. Se consideră un pătrat. Determinați câte un punct pe fiecare latură a pătratului dat astfel încât patrulaterul având vârfurile în aceste puncte să aibă perimetrul minim.

2. Trei muncitori A, B, C sapă un șanț. Muncind singuri, fiecare dintre muncitori ar termina șanțul într-un număr întreg de zile. Muncind împreună ei ar termina cu 2,5 și 10 zile mai puțin decât dacă doar doi dintre ei ar munci împreună, în absența lui A, B și respectiv C. Câte zile i-ar fi necesare celui mai lent dintre muncitori ca să termine de săpat șanțul dacă el ar munci singur ?

3. Andrei a înmulțit două numere naturale consecutive și a obținut ca rezultat un număr care într-o anumită bază de numerație se scrie ca număr două cifre consecutive, fiecare cifră nefiind mai mare decât 9 . Determinați toate exemplele care verifică condiția de mai sus .

4. Să se arate că printre orice 30de termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația 2061, nu există mai mult 20 de pătrate perfecte.

5. Dacă x, y sunt numere reale care satisfac inegalitatea $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$, arătați că $x \geq -\frac{1}{6}$.

6. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} 2^a + 3^b = 5^b \\ 3^a + 6^b = 9^b \end{cases}$$

7. Maria pictează pătrățelele unei table albe format din 10×10 pătrățele. Ea poate picta orice rând în roșu și orice coloană în albastru (orice rând și orice coloană este pictat cel mult o data). Dacă un pătrățel roșu este re-pictat în albastru, el devine albastru și dacă un pătrățel albastru este re-pictat în roșu, vopselele intră în reacție și pătrățelul își pierde culoarea (el devine alb). Este posibil ca Maria să obțină exact 33 de pătrățele roșii pe tablă?

8. Se consideră triunghiul ABC și punctul D pe latura (AB) astfel încât $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ABC$. Fie S centrul cercului circumscris ΔBCD și P mijlocul segmentului (BD). Arătați că punctele A, C, S și P sunt conciclice.

9. În triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ avem

$$sinA = cosA_1, \qquad sinB = cosB_1, \qquad sinC = \cos C_1$$

Aflați toate valorile posibile ale celui mai mare dintre aceste șase unghiuri.

10. Rezolvați în mulțimea numerelor prime ecuația: $100q + 80 = p^3 + q^2$.

Olimpiada Internațională de Matematică "Formula of Unity"/ "The Third Millennium"

Anul 2014/2015 Runda I Clasa R11

1. Trei muncitori A, B, C sapă un șanț. Muncind singuri, fiecare dintre muncitori ar termina șanțul într-un număr întreg de zile. Muncind împreună ei ar termina cu 2,5 și 10 zile mai puțin decât dacă doar doi dintre ei ar munci împreună, în absența lui A, B și respectiv C. Câte zile i-ar fi necesare celui mai lent dintre muncitori ca să termine de săpat șanțul dacă el ar munci singur ?

2. Andrei a înmulțit două numere naturale consecutive și a obținut ca rezultat un număr care într-o anumită bază de numerație se scrie ca număr două cifre consecutive, fiecare cifră nefiind mai mare decât 9 . Determinați toate aceste numere .

3. Să se arate că printre orice 30 de termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația 2061, nu există mai mult 20 de pătrate perfecte.

4. Dacă x, y sunt numere reale care satisfac inegalitatea $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$, arătați că $x \geq -\frac{1}{6}$.

5. Maria pictează pătrățelele unei table albe format din 10×10 pătrățele. Ea poate picta orice rând în roșu și orice coloană în albastru (orice rând și orice coloană este pictat cel mult o data). Dacă un pătrățel roșu este re-pictat în albastru, el devine albastru și dacă un pătrățel albastru este re-pictat în roșu, vopselele intră în reacție și pătrățelul își pierde culoarea (el devine alb). Este posibil ca Maria să obțină exact 33 de pătrățele roșii pe tablă?

6. Pentru orice $a > 1$ este adevărat că $\log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1}\sqrt{a} \geq \sqrt{6}$?

7. Se consideră un dreptunghi de dimensiuni 200×3 care se pavează cu dreptunghiuri de dimensiuni 1×2 și 2×1. Arătați că numărul acestor pavări este divizibil cu 3.

8. Din mulțimea de numere $1, 2, 3, \dots, N$ se aleg aleator trei numere (două sau trei dintre ele pot fie gale) și se așează în ordine crescătoare. Care este probabilitatea ca aceste numere să formeze o progresie aritmetică ?

9. În triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ avem

$$sinA = cosA_1, \qquad sinB = cosB_1, \qquad sinC = \cos C_1$$

   Aflați toate valorile posibile ale celui mai mare dintre aceste șase unghiuri.

10. Arătați că numerele $d(1) + d(2) + \cdots + d(n)$ și $\left[\sqrt{n}\right]$ au aceeași paritate, unde $d(k)$ și $[x]$ desemnează numărul divizorilor numărului natural k și respectiv partea întreagă a numărului real x.