International Mathematics Olympiad
“Formula of Unity” / “The Third Millenium”
Année 2014/2015. Tour 1

R5 - Problèmes pour 5eme primaire

Les problèmes doivent être résolus en détail !

1. Un mois s’appelle “dur” s’il contient 5 lundis. Combien de mois « durs » peut-il avoir dans une année ?

2. Andrew multiplie deux chiffres consécutifs et il obtient un nombre de deux chiffres consécutifs. Trouve tous les exemples de cette sorte.

3. Alex et Ben ont deux livres identiques. Alex ouvre son livre a la page 25 et barre tous les mots sans lettre A ; après il barre tous les mots sans lettre B, et finalement, il barre tous les mots qui contiennent les deux lettres : O et A. Ben ouvre son livre à même page et il barre tous les mots qui ne contiennent pas B, mais contiennent la lettre A ou la lettre O (peut-être les deux en même temps) ; après ça il barre tous les mots qui ne contiennent ni le A et ni O. Est-il possible que Ben a barré plus des mots qu’Alex ?

4. Il y a deux classes avec 30 étudiants en dans chacun. Le nombre des garçons dans la première classe est le double du nombre de garçons dans la deuxième; et le nombre de filles dans la première classe est trois fois moins que le nombre des filles dans la deuxième. Combien de garçons et filles y a-t-il dans chaque classe?

5. Trois stylos, quatre crayons et une règle coutent 26 dollars. Cinq stylos, six crayons et trois règles coutent 44 dollars. Combien deux stylos et trois crayons couterons-elles?

6. Le nombre 1 est écrit sur le tableau. Dans une étape est permis de : (1) multiplier un nombre par 3 ou (2) réarranger les chiffres du nombre. Est-il possible d’arriver, après plusieurs étapes, jusqu’au nombre 999 ?

International Mathematics Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millenium"
Année 2014/2015. Tour 1

R6 - Problèmes pour 6eme primaire

Les problèmes doivent être résolus en détail !

1. Un mois s'appelle "dur" s'il contient 5 lundis. Combien de mois « durs » peut-il avoir dans une année ?

2. Andrew multiplie deux chiffres consécutifs et il obtient un nombre de deux chiffres consécutifs. Trouve tous les exemples de cette sorte.

3. Alex et Ben ont deux livres identiques. Alex ouvre son livre a la page 25 et barre tous les mots sans lettre A ; après il barre tous les mots sans lettre B, et finalement, il barre tous les mots qui contiennent les deux lettres : O et A. Ben ouvre son livre à même page et il barre tous les mots qui ne contiennent pas B, mais contiennent la lettre A ou la lettre O (peut-être les deux en même temps) ; après ça il barre tous les mots qui ne contiennent ni le A et ni O. Est-il possible que Ben a barré plus des mots qu'Alex ?

4. Il y a deux classes avec 30 étudiants en dans chacun. Le nombre des garçons dans la première classe est le double du nombre de garçons dans la deuxième; et le nombre de filles dans la première classe est trois fois moins que le nombre des filles dans la deuxième. Combien de garçons et filles y a-t-il dans chaque classe?

5. Trois stylos, quatre crayons et une règle coutent 26 dollars. Cinq stylos, six crayons et trois règles coutent 44 dollars. Combien deux stylos et trois crayons couterons-elles?

6. Le nombre 1 est écrit sur le tableau. Dans une étape est permis de : (1) multiplier un nombre par 2 ou (2) réarranger les chiffres du nombre.
   Est-il possible d'arriver, après plusieurs étapes, jusqu'au nombre 209 ?

International Mathematics Olympiad
“Formula of Unity” / “The Third Millenium”
Année 2014/2015. Tour 1

R7 - Problèmes 1ere secondaire (7eme)

Les problèmes doivent être résolus en détail !

1. Un mois s’appelle “dur” s’il contient 5 lundis. Combien de mois « durs » peut-il avoir dans une année ?

2. Andrew multiplie deux chiffres consécutifs et il obtient un nombre de deux chiffres consécutifs. Trouve tous les exemples de cette sorte.

3. La somme de trois entiers positifs est 100. Quelle est la valeur la plus petite possible pour leur plus petit commun multiple ?

4. Démontre que peu importe comment on arrange les nombres 1, 2, …, 10 sur la circonférence d’un cercle, il y a trois nombres adjacents tel que leur somme n’est pas plus petite que 18.

5. Trois stylos, quatre crayons et une règle coutent 26 dollars. Cinq stylos, six crayons et trois règles coutent 44 dollars. Combien deux stylos et trois crayons couterons-elles?

6. Trouve le plus petit nombre naturel tel qu’il commence par 11, termine par 11 et il est divisible par 7. Démontre que c’est effectivement le plus petit nombre avec les propriétés spécifiées.

International Mathematics Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millenium"
Année 2014/2015. Tour 1

R8 - Problème 2eme secondaire (8eme)

1. Démontre que pour chaque n>3 il existe un polygone d'ordre *n* sans des diagonales parallèles.
2. BK est la bissectrice du triangle ABC. En sachant que AB=AC et BC=AK+BK, trouve les angles du triangle.
3. Trois mineurs A, B et C creusent un fossé. Chacun d'eux, travaillant seul, peut creuser le fossé dans un nombre entier de jours. S'ils creusent tous ensemble, ils passent 2 jours de moins en travaillant que si seulement B et C travaillent, ou 5 jours de moins que si seulement A et C travaillent, ou 10 jours de moins si seulement A et B travaillent. Combien de jours il prend au mineur plus lent de creuser le fossé seul?
4. Considérez 15 nombres composés plus petits ou égaux au 2014. Démontrez qu'il y a deux nombres entre eux ayant un facteur commun plus grand que 1.
5. Un carré du coin d'une table aux dimensions 100x100 est découpé. Est-il possible à diviser cette figure dans 33 morceaux ayant tous le même périmètre et même aire ? On peut couper seulement sur les côtés des carrés.
6. Si on insère un signe de multiplication après les trois premiers chiffres d'un nombre ayant 6 chiffres, le résultat sera 7 fois de moins que le nombre initial. Trouve ce nombre.
7. Il y a N^2 de cartes avec des nombres sur une des faces de cartes (l'autre face est blanche). Tous les nombres sont différents. Les cartes sont rangées dans une configuration carrée de NxN, avec les faces blanches en haut. Démontre que toujours est-il possible de trouver un nombre qui est plus petit que tous les nombres adjacents à lui dans moins de 8N retournement de cartes. (On appelle deux nombres adjacents si leurs cartes partagent un côté commun).
8. On appellera un nombre positif entier « ascendant » si chaque de ses chiffre est plus grand que celui qui le précède (ex. 7 et 3579 sont « ascendants », mais 2447 non). Au moins combien de nombres « ascendants » devons-nous additionner pour obtenir 2014?
9. Résous l'équation $2^a-2^b-2^{b+c=}2014$ dans l'ensemble de nombres entiers positifs.
10. Les angles B et C d'un triangle ABC sont égaux à 30° et 105°, et P est le milieu du BC. Trouve la mesure d'angle BAP.

International Mathematics Olympiad
“Formula of Unity” / “The Third Millenium”
Année 2014/2015. Tour 1

R9 - Problèmes 3eme secondaire (9eme)

1. Démontre que pour chaque n>3 il existe un polygone d’ordre *n* sans des diagonales parallèles.

2. La somme de trois entiers positifs est 100. Quelle est la valeur la plus petite possible pour leur plus petit commun multiple ?

3. Trois mineurs A, B et C creusent un fossé. Chacun d’eux, travaillant seul, peut creuser le fossé dans un nombre entier de jours. S’ils creusent tous ensemble, ils passent 2 jours de moins en travaillant que si seulement B et C travaillent, ou 5 jours de moins que si seulement A et C travaillent, ou 10 jours de moins si seulement A et B travaillent. Combien de jours il prend au mineur plus lent de creuser le fossé seul?

4. Andrew a calculé le produit de deux nombres entiers consécutifs et il l’a écrit dans une base particulière. Le résultat était un nombre à deux chiffres consécutifs, aucun plus grand que 9. Trouve ces chiffres.

5. Un carré du coin d’une table aux dimensions 100x100 est découpé. Est-il possible à diviser cette figure dans 33 morceaux ayant tous le même périmètre et même aire ? On peut couper seulement sur les côtés des carrés.

6. Résous l’équation $2^a-2^b-2^{b+c=}2014$ dans l’ensemble de nombres entiers positifs.

7. Il y a 162 signes de plus et 144 signes de moins dans les cases d’une table 30x30 (juste une signe par case, certaines cases restent vides). On sait qu’il n’y a pas plus de 17 signes dans chaque ligne et chaque colonne. Pour chaque signe plus, Bob compte combien de signes moins il y a sur la même rangée. Pour chaque signe de moins, Bob compte combien de signes de plus il y a dans la même colonne. Quelle est la somme maximal de tous les nombres de Bob?

8. Dans un triangle ABC, il y a un point D sur le côté AB tel que <ACD=<ABC. Soit S comme le centre du cercle circonscrit du triangle BCD. Démontrez que les points A, C, S et le milieu du BD sont cocycliques.

9. On considère deux triangles, ABC et $A_1B_1C_1$, tel que :
   $\sin A=\cos A_1$, $\sin B=\cos B_1$, $\sin C=\cos C_1$.
   Trouve toutes les valeurs possibles pour le plus grand entre les six angles.

10. Dans le triangle ABC il y a un point H tel que <HAB=<HCB et <HBC=<HAC. Démontre que H est l’orthocentre du triangle ABC.

International Mathematics Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millenium"
Année 2014/2015. Tour 1

R10 - Problèmes 4eme secondaire (10eme)

1. Choisis un point sur chaque côté d'un carré tel que le quadrilatère déterminé par les quatre points choisis ait le plus petit périmètre possible.

2. Trois mineurs A, B et C creusent un fossé. Chacun d'eux, en travaillant seul, peut creuser le fossé dans un nombre entier de jours. S'ils creusent tous ensemble, ils passent 2 jours de moins en travaillant que si seulement B et C travaillent, ou 5 jours de moins que si seulement A et C travaillent, ou 10 jours de moins si seulement A et B travaillent. Combien de jours il prend au mineur plus lent de creuser le fossé seul?

3. Andrew a calculé le produit de deux nombres entiers consécutifs et il l'a écrit dans une base particulière. Le résultat était un nombre à deux chiffres consécutifs, aucun plus grand que 9. Trouve ces chiffres.

4. Considère une suite arithmétique ayant la raison 2061. Démontre qu'entre 30 termes consécutifs il y a, au plus, 20 carrés parfaits.

5. Considère deux nombres réels x et y tel que: $x^4y^2+x^2+2x^3y+6x^2y+8\le 0$.
   Démontre que $x\ge -\frac{1}{6}$.

6. Résous le système d'équations dans l'ensemble de nombres entiers :
$$\begin{cases}2^a+3^b=5^b\\3^a+6^b=9^b\end{cases}$$

7. Maria peint un tableau blanc de 10x10. Elle peut peintre une rangée (en horizontale) en rouge ou une colonne (en vertical) en bleu (chaque rangée ou colonne peut être peint une seule fois). Si un carré rouge est repeint en bleu, alors il reste bleu; mais, si un carré bleu est repeint en rouge, la peinture rentre en réaction et le carré perd sa couleur (redevient blanc). Est-il possible d'obtenir exactement 33 carrés rouges sur le tableau?

8. Dans un triangle ABC, il y a un point D sur le côté AB tel que <ACD=<ABC. Soit S comme le centre du cercle circonscrit du triangle BCD. Démontrez que les points A, C, S et le milieu du BD sont cocycliques.

9. On considère deux triangles, ABC et $A_1B_1C_1$, tel que :
   $\sin A=\cos A_1$, $\sin B=\cos B_1$, $\sin C=\cos C_1$.
   Trouve toutes les valeurs possibles pour le plus grand entre les six angles.

10. Résous l'équation dans l'ensemble de nombres premiers : $100q+80=p^3+q^3$

International Mathematics Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millenium"
Année 2014/2015. Tour 1

R11 - Problèmes 5eme secondaire (11eme)

1. Trois mineurs A, B et C creusent un fossé. Chacun d'eux, en travaillant seul, peut creuser le fossé dans un nombre entier de jours. S'ils creusent tous ensemble, ils passent 2 jours de moins en travaillant que si seulement B et C travaillent, ou 5 jours de moins que si seulement A et C travaillent, ou 10 jours de moins si seulement A et B travaillent. Combien de jours il prend au mineur plus lent de creuser le fossé seul?

2. Andrew a calculé le produit de deux nombres entiers consécutifs et il l'a écrit dans une base particulière. Le résultat était un nombre à deux chiffres consécutifs, aucun plus grand que 9. Trouve ces chiffres.

3. Considère une suite arithmétique ayant la raison 2061. Démontre qu'entre 30 termes consécutifs il y a, au plus, 20 carrés parfaits.

4. Considère deux nombres réels x et y tel que: $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \le 0$.
   Démontre que $x \ge -\frac{1}{6}$.

5. Maria peint un tableau blanc de 10x10. Elle peut peintre une rangée (en horizontale) en rouge ou une colonne (en vertical) en bleu (chaque rangée ou colonne peut être peint une seule fois). Si un carré rouge est repeint en bleu, alors il reste bleu; mais, si un carré bleu est repeint en rouge, la peinture rentre en réaction et le carré perd sa couleur (redevient blanc). Est-il possible d'obtenir exactement 33 carrés rouges sur le tableau?

6. Est-il toujours vrai que $\log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1}\sqrt{a} \ge \sqrt{6}$ si $a > 1$?

7. Démontre que le nombre de modalités à diviser un rectangle 200x3 en rectangles 1x2 et rectangles 2x1 est divisible par 3.

8. Trois nombres sont choisis de façon aléatoire entre les nombres 1,…, N (deux ou trois de ces nombres peuvent être égaux) et rangés en ordre croissant. Trouve la probabilité qu'ils forment une suite arithmétique.

9. On considère deux triangles, ABC et $A_1B_1C_1$, tel que :
   $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$.
   Trouve toutes les valeurs possibles pour le plus grand entre les six angles.

10. On va noter avec d(k) le nombre de diviseurs du nombre k et par $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ la partie entière du nombre réel x. Démontre que les nombres d(1)+d(2)+…+d(n) et $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ont la même parité.