INTERNACIA MATEMATIKA OLIMPIKO “FORMULO DE INTEGRECO” / “LA TRIA JARMILO”

Lernojaro 2014/2015

La unua etapo

Taskoj por la 5-a klaso

Bonvolu ne forgesi motivi la respondojn.

1. Ni nomu la monaton kun kvin lundoj *malfacila*. Kiom da *malfacilaj* monatoj povas esti dum unu jaro?

2. Andreo multiplikis du sinsekvajn ciferojn kaj ricevis dusignan nombron, skribatan per du sinsekvaj ciferoj. Trovu ĉiujn tiajn ekzemplojn.

3. Sur la 25-a paĝo de lernolibro Saĉjo forstrekis ĉiujn vortojn, ne enhavantajn literon *A*, poste li forstrekis ĉiujn vortojn, ne enhavantajn literon *B*, kaj poste li trovis ĉiujn vortojn, enhavantajn samtempe literojn *O* kaj *A*, kaj forstrekis ankaŭ ilin. Koĉjo, sur la sama paĝo de sia lernolibro, forstrekis vortojn, ne enhavantajn literon *B*, sed enhavantajn *A* aŭ *O* (eble, ambaŭ samtempe), kaj post tio li forstrekis ĉiujn vortojn, enhavantajn nek literon *A*, nek *O*. Ĉu Saĉjo povis havi pli da neforstrekitajn vortoj, ol Koĉjo?

4. En ambaŭ el du klasoj estas po 30 lernantoj. En la unua klaso estas duoble pli da knaboj, ol en la dua klaso, kaj trioble malpli da knabinoj, ol en la dua klaso. Kiom da knaboj kaj knabinoj lernas en ĉiu klaso?

5. Tri skribiloj, kvar krajonoj kaj unu liniilo kune kostas 26 rublojn, sed kvin skribiloj, ses krajonoj kaj tri liniiloj kostas 44 rublojn. Kiom da rubloj kostas du skribiloj kaj tri krajonoj kune?

6. Sur la tabulo estas skribita nombro 1. Oni rajtas multipliki je 3 ajnan skribitan nombron, aŭ reloki ciferojn en ĝi. Ĉu eblas tiumaniere ricevi nombron 999?

INTERNACIA MATEMATIKA OLIMPIKO “FORMULO DE INTEGRECO” / “LA TRIA JARMILO”

Lernojaro 2014/2015

La unua etapo

Taskoj por la 6-a klaso

Bonvolu ne forgesi motivi la respondojn.

1. Ni nomu la monaton kun kvin lundoj *malfacila*. Kiom da *malfacilaj* monatoj povas esti dum unu jaro?

2. Andreo multiplikis du sinsekvajn ciferojn kaj ricevis dusignan nombron, skribatan per du sinsekvaj ciferoj. Trovu ĉiujn tiajn ekzemplojn.

3. Sur la 25-a paĝo de lernolibro Saĉjo forstrekis ĉiujn vortojn, ne enhavantajn literon *A*, poste li forstrekis ĉiujn vortojn, ne enhavantajn literon *B*, kaj poste li trovis ĉiujn vortojn, enhavantajn samtempe literojn *O* kaj *A*, kaj forstrekis ankaŭ ilin. Koĉjo, sur la sama paĝo de sia lernolibro, forstrekis vortojn, ne enhavantajn literon *B*, sed enhavantajn *A* aŭ *O* (eble, ambaŭ samtempe), kaj post tio li forstrekis ĉiujn vortojn, enhavantajn nek literon *A*, nek *O*. Ĉu Saĉjo povis havi pli da neforstrekitajn vortoj, ol Koĉjo?

4. En ambaŭ el du klasoj estas po 30 lernantoj. En la unua klaso estas duoble pli da knaboj, ol en la dua klaso, kaj trioble malpli da knabinoj, ol en la dua klaso. Kiom da knaboj kaj knabinoj lernas en ĉiu klaso?

5. Tri skribiloj, kvar krajonoj kaj unu liniilo kune kostas 26 rublojn, sed kvin skribiloj, ses krajonoj kaj tri liniiloj kostas 44 rublojn. Kiom da rubloj kostas du skribiloj kaj tri krajonoj kune?

6. Sur la tabulo estas skribita nombro 1. Oni rajtas multipliki je 2 ajnan skribitan nombron, aŭ reloki ciferojn en ĝi. Ĉu eblas tiumaniere ricevi nombron 209?

INTERNACIA MATEMATIKA OLIMPIKO “FORMULO DE INTEGRECO” / “LA TRIA JARMILO”

Lernojaro 2014/2015

La unua etapo

Taskoj por la 7-a klaso

Bonvolu ne forgesi motivi la respondojn.

1. Ni nomu la monaton kun kvin lundoj *malfacila*. Kiom da *malfacilaj* monatoj povas esti dum unu jaro?

2. Andreo multiplikis du sinsekvajn ciferojn kaj ricevis dusignan nombron, skribatan per du sinsekvaj ciferoj. Trovu ĉiujn tiajn ekzemplojn.

3. La sumo de tri naturaj nombroj egalas 100. Kiun plej eble malgrandan signifon povas havi la PMKO (la plej malgranda komuna oblo) de tiuj nombroj?

4. Pruvu, ke ĉe ajna lokado de nombroj 1, 2, ..., 10 en la rondo, troviĝos tri najbaraj nombroj kun la sumo ne malpli ol 18.

5. Tri skribiloj, kvar krajonoj kaj unu liniilo kune kostas 26 rublojn, sed kvin skribiloj, ses krajonoj kaj tri liniiloj kostas 44 rublojn. Kiom da rubloj kostas du skribiloj kaj tri krajonoj kune?

6. Trovu la plej malgrandan naturan nombron, kiu komenciĝas per 11, finiĝas per 11 kaj divideblas per 7. Klarigu, kial tiu nombro estas la plej malgranda el la ĉiuj konformaj al la kondiĉo de la tasko.

INTERNACIA MATEMATIKA OLIMPIKO “FORMULO DE INTEGRECO” / “LA TRIA JARMILO”

Lernojaro 2014/2015

La unua etapo

Taskoj por la 8-a klaso

1. Pruvu, ke por ajna $n > 3$ ekzistas n-latero (n-angula poligono), en kiu neniuj du diagonaloj estas paralelaj.

2. BK estas bisekcanto de triangulo ABC. Konatas, ke $AB = AC$, kaj $BC = AK + BK$. Eltrovu la angulojn de la triangulo ABC.

3. Ĉiu el tri fosantoj, laborante sole, povas fari tranĉeon dum entjera (senfrakcia) nombro de tagoj. Se la saman tranĉeon ili fosus ĉiuj kune, ili pasigus respektive je 2, 5 kaj 10 tagojn malpli, ol fosante duope (t.e. sen la unua, la dua kaj la tria respektive). Kiom da tagoj bezonas la plej malrapida fosanto por fosi la kavaĵon?

4. Donitas 15 kompundaj (kombinaj) nombroj, ne pli grandaj ol 2014. Pruvu, ke iuj du el ili havas komunan divizoron, pli grandan ol 1.

5. Donitas kvadrato 100 x 100 sen unu angula ĉelo. Ĉu eblas distranĉi ĝin laŭ la ĉeloj al 33 figuroj, kiuj havas egalajn areojn kaj egalajn perimetrojn?

6. En sessigna nombro oni metis signon de multipliko post la unuaj tri ciferoj, kaj okazis, ke la rezulto de multipliko de la du ricevitaj trisignaj nombroj estas 7-oble malpli granda ol la komenca nombro. Kiu nombro estis skribita?

7. Ni havas kolekton de N^2 kartoj, en ĉiu karto sur unu flanko estas skribita nombro, la alia flanko estas malplena. Skribitaj nombroj diferencas popare. La kartoj kuŝas en la formo de kvadrato N x N, la malplena flanko supren. Permesatas renversi ajnan karton kaj do ekscii la skribitan sur ĝi nombron. Pruvu, ke ne pli ol 8*N renversoj ebligas trovi karton kun la nombro malpli granda ol nombroj de ĉiuj ĝiaj najbaroj (laŭ la flanko).

8. Ni nomu naturan nombron *kreskanta*, se ciferoj en ĝi sekvas en la ordo de strikta kresko (ekzemple, 7 aŭ 1589 estas *kreskantaj*, sed 2447 – ne estas). Kiun la plej malgrandan kvanton da kreskantaj nombroj oni devas adicii por ricevi 2014?

9. Trovu ĉiujn naturajn nombrojn a, b kaj c, por kiuj $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$

10. En triangulo *ABC* la anguloj *B* kaj *C* egalas 30 kaj 105 gradoj, kaj *P* estas mezo de la flanko *BC*. Trovu la angulon *BAP*.

INTERNACIA MATEMATIKA OLIMPIKO “FORMULO DE INTEGRECO” / “LA TRIA JARMILO”

Lernojaro 2014/2015

La unua etapo

Taskoj por la 9-a klaso

1. Pruvu, ke por ajna $n > 3$ ekzistas n-latero (n-angula poligono), en kiu neniuj du diagonaloj estas paralelaj.

2. La sumo de tri naturaj nombroj egalas 100. Kiun plej eble malgrandan signifon povas havi la PMKO (la plej malgranda komuna oblo) de tiuj nombroj?

3. Ĉiu el tri fosantoj, laborante sole, povas fari tranĉeon dum entjera (senfrakcia) nombro de tagoj. Se la saman tranĉeon ili fosus ĉiuj kune, ili pasigus respektive je 2, 5 kaj 10 tagojn malpli, ol fosante duope (t.e. sen la unua, la dua kaj la tria respektive). Kiom da tagoj bezonas la plej malrapida fosanto por fosi la kavaĵon?

4. Andreo multiplikis du sinsekvajn naturajn nombrojn kaj ricevis dusignan nombron en iu kalkulsistemo, kiu estas skribata per du sinsekvaj ciferoj ne pli grandaj ol 9. Trovu tiujn ciferojn.

5. Donitas kvadrato 100 x 100 sen unu angula ĉelo. Ĉu eblas distranĉi ĝin laŭ la ĉeloj al 33 figuroj, kiuj havas egalajn areojn kaj egalajn perimetrojn?

6. Trovu ĉiujn naturajn nombrojn a, b kaj c, por kiuj $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$

7. En la tabelon je 30 x 30 ĉeloj estas metitaj 162 plusoj kaj 144 minusoj (en ĉiu ĉelo ne pli ol unu signo) en tiu maniero, ke en ĉiu linio kaj ĉiu kolumno de la tabelo estas ne pli ol 17 signoj. Por ĉiu pluso oni kalkulis la kvanton de minusoj en la sama linio. Por ĉiu minuso oni kalkulis la kvanton de plusoj en la sama kolumno. Kiun la plej grandan signifon povas havi la sumo de trovitaj nombroj?

8. En la triangulo *ABC* sur la flanko *AB* estas elektita punkto *D* tiel, ke la anguloj *ACD* kaj *ABC* egalas. Punkto *S* estu la centro de ĉirkaŭskribita cirklo de la triangulo *BCD*. Pruvu, ke la punktoj *A*, *C*, *S* kaj la mezo de *BD* troviĝas sur unu cirkonferenco (cirklo).

9. La trianguloj *ABC* kaj $A_1B_1C_1$ estas tiaj, ke sin *A* = cos A_1, sin *B* = cos B_1, sin *C* = cos C_1. Kiujn signifojn povas havi la plej granda el la ses anguloj?

10. Estu *H* tia punkto ene de triangulo *ABC*, ke angulo *HAB* = angulo *HCB*, kaj angulo *HBC* = angulo *HAC*. Pruvu, ke *H* estas punkto, kie interkruciĝas la altoj de la triangulo *ABC*.

INTERNACIA MATEMATIKA OLIMPIKO “FORMULO DE INTEGRECO” / “LA TRIA JARMILO”

Lernojaro 2014/2015

La unua etapo

Taskoj por la 10-a klaso

1. En ĉiu flanko de kvadrato elektu po unu punkton tiel, ke la rezultiĝinta el ili kvarangulo havu la plej malgrandan perimetron.

2. Ĉiu el tri fosantoj, laborante sole, povas fari tranĉeon dum entjera (senfrakcia) nombro de tagoj. Se la saman tranĉeon ili fosus ĉiuj kune, ili pasigus respektive je 2, 5 kaj 10 tagojn malpli, ol fosante duope (t.e. sen la unua, la dua kaj la tria respektive). Kiom da tagoj bezonas la plej malrapida fosanto por fosi la kavaĵon?

3. Andreo multiplikis du sinsekvajn naturajn nombrojn kaj ricevis dusignan nombron en iu kalkulsistemo, kiu estas skribata per du sinsekvaj ciferoj ne pli grandaj ol 9. Trovu tiujn ciferojn.

4. Koĉjo skribis 30 sinsekvajn membrojn de aritmetika progresio kun diferenco 2061. Pruvu, ke ĝi enhavas ne pli ol 20 striktajn kvadratojn.

5.

Reelaj nombroj x kaj y estas tiaj, ke $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 <= 0$.

Pruvu, ke $x >= -1/6$.

Reelaj nombroj x kaj y estas tiaj, ke $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$.

Pruvu, ke $x \geq -\frac{1}{6}$.

6. Solvu la sistemon de ekvacioj en entjeroj (senfrakciaj nombroj):

$$\begin{cases} 2^a + 3^b = 5^b \\ 3^a + 6^b = 9^b \end{cases}$$

7. Manjo kolorigas ĉelojn de blanka tabelo 10 x 10. Ŝi povas kolorigi ajnan vertikalan kolumnon per blua farbo aŭ ajnan horizontalan linion per ruĝa farbo (ĉiun vicon eblas kolorigi ne pli ol unu fojon). Se la blua farbo kuŝiĝas super la ruĝa, oni ricevas la bluan ĉelon, tamen se la ruĝa kuŝiĝas super la blua, la farboj reagas kaj perdas koloron, la ĉelo fariĝas blanka. Ĉu povas esti, ke en la tabelo okazos 33 ruĝaj ĉeloj?

8. En la triangulo *ABC* sur la flanko *AB* estas elektita punkto *D* tiel, ke la anguloj *ACD* kaj *ABC* egalas. Punkto *S* estu la centro de ĉirkaŭskribita cirklo de la triangulo *BCD*. Pruvu, ke la punktoj *A*, *C*, *S* kaj la mezo de *BD* troviĝas sur unu rekta linio.

9. La trianguloj ABC kaj $A_1B_1C_1$ estas tiaj, ke $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. Kiujn signifojn povas havi la plej granda el la ses anguloj?

10. Solvu la ekvacion en primoj (simplaj nombroj): $100q + 80 = p^3 + q^2$.

INTERNACIA MATEMATIKA OLIMPIKO “FORMULO DE INTEGRECO” / “LA TRIA JARMILO”

Lernojaro 2014/2015

La unua etapo

Taskoj por la 11-a klaso

1. Ĉiu el tri fosantoj, laborante sole, povas fari tranĉeon dum entjera (senfrakcia) nombro de tagoj. Se la saman tranĉeon ili fosus ĉiuj kune, ili pasigus respektive je 2, 5 kaj 10 tagojn malpli, ol fosante duope (t.e. sen la unua, la dua kaj la tria respektive). Kiom da tagoj bezonas la plej malrapida fosanto por fosi la kavaĵon?

2. Andreo multiplikis du sinsekvajn naturajn nombrojn kaj ricevis dusignan nombron en iu kalkulsistemo, kiu estas skribata per du sinsekvaj ciferoj ne pli grandaj ol 9. Trovu tiujn ciferojn.

3. Koĉjo skribis 30 sinsekvajn membrojn de aritmetika progresio kun diferenco 2061. Pruvu, ke ĝi enhavas ne pli ol 20 striktajn kvadratojn.

4. Reelaj nombroj *x* kaj *y* estas tiaj, ke $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 <= 0$.

Pruvu, ke $x >= -1/6$.

Reelaj nombroj *x* kaj *y* estas tiaj, ke $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \le 0$.

Pruvu, ke $x \ge -⅙$.

5. Manjo kolorigas ĉelojn de blanka tabelo 10 x 10. Ŝi povas kolorigi ajnan vertikalan kolumnon per blua farbo aŭ ajnan horizontalan linion per ruĝa farbo (ĉiun vicon eblas kolorigi ne pli ol unu fojon). Se la blua farbo kuŝiĝas super la ruĝa, oni ricevas la bluan ĉelon, tamen se la ruĝa kuŝiĝas super la blua, la farboj reagas kaj perdas koloron, la ĉelo fariĝas blanka. Ĉu povas esti, ke en la tabelo okazos 33 ruĝaj ĉeloj?

6.

Ĉu eblas aserti, ke log(*a*+1, bazo(radiko(*a*))) + log(radiko(*a*), bazo(*a*+1)) >= radiko(6) se *a* > 1 ?
Ĉu eblas aserti, ke $log_{\sqrt{a}}(a+1) + log_{a+1}\sqrt{a} \ge \sqrt{6}$ se $a > 1$?

7. Pruvu, ke la kvanto de eblecoj distranĉi la rektangulon 200 x 3 por ricevi domenon (kartojn 1x2) divideblas per 3.

8. Hazarde oni elektas 3 nombrojn de 1 ĝis N (eble eĉ samajn) kaj metas ilin en kreskanta ordo. Kun kiu probableco ili formos aritmetikan progresion?

9. La trianguloj ABC kaj $A_1B_1C_1$ estas tiaj, ke sin A = cos A_1, sin B = cos B_1, sin C = cos C_1. Kiujn signifojn povas havi la plej granda el la ses anguloj?

10.

Estu $d(k)$ la kvanto de divizoroj de natura nombro k, kaj kvadrataj krampoj signifu la entjeran parton (la parton antaŭ la komo) de reela nombro (nombro kun komo). Pruvu, ke nombroj $d(1) + d(2) + ... + d(n)$ kaj [radiko(n)] havas la saman parecon.
Estu $d(k)$ la kvanto de divizoroj de natura nombro k, kaj kvadrataj krampoj signifu la entjeran parton (la parton antaŭ la komo) de reela nombro (nombro kun komo). Pruvu, ke nombroj $d(1) + d(2) + ... + d(n)$ kaj $\left[\sqrt{n}\right]$ havas la saman parecon.

Aldonaj taskoj

Tiuj taskoj *povas esti* uzataj por anstataŭi kelkajn aliajn.

1. En kajera folio estas ĉirkaŭdesegnitaj du rektanguloj: la unua konsistas el 36 ĉxeloj, la dua el 85. La unua rektangulo havas la vertikalan flankon malpli longan ol la horizontalan, la dua rektangulo – inverse. Kiom grandas maksimume ebla areo de ilia komuna parto?

2. En la kajera folio estas desegnitaj du rektanguloj. La unua enhavas pli ol 30, sed malpli ol 50 ĉelojn, la dua enhavas pli ol 80, sed malpli ol 90 ĉelojn. La unua rektangulo havas la vertikalan flankon malpli longan ol la horizontalan, la dua rektangulo – inverse. Kiom grandas maksimume ebla areo de ilia komuna parto?

3. Sur la ebena planedo ekzistas kvadrata kontinento. Iu punkto en la kontinento nomiĝas arida, se ĝi foras de ĉiuj bordoj pli ol 1000 kilometrojn. Trovu la areon de la kontinento, se la areo de ties arida parto estas 10000 km^2.

4. En la ebena mondo ekzistas rektangula kontinento, kaj unu ties flanko duoble pli longas ol la dua. La punkto en la kontinento nomiĝas arida, se ĝi foras de ĉiuj bordoj pli ol 1000 kilometrojn. Trovu la areon de la kontinento, se la areo de ties arida parto estas 780000 km^2.