№1.

Т.к. факториал определён только для целых чисел $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{k}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$ и $k \vdots 2$. Но, заметим, что если $k \in \mathbb{Z}$, то $(2016+k^2) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ левая часть равенства тоже должна принадлежать целым числам $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{k}{4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$ и $k \vdots 4 \Rightarrow k = 4a$, где $a \in \mathbb{N}$, т.к. факториал определён только для цел. неотр. чисел, а $k=0$ – не подходит.

Если $k=4a \Rightarrow \left(\frac{4a}{2}\right)! \cdot \left(\frac{4a}{4}\right) \overset{\Leftrightarrow}{=} 2016+(4a)^2$

$$(2a)! \cdot a = 2016+(4a)^2.$$

При $a=1 \Rightarrow 2! \cdot 1 = 2 < 2016+16 \Rightarrow a \neq 1$

При $a=2 \Rightarrow 4! \cdot 2 = 48 < 2016+64 \Rightarrow a \neq 2$

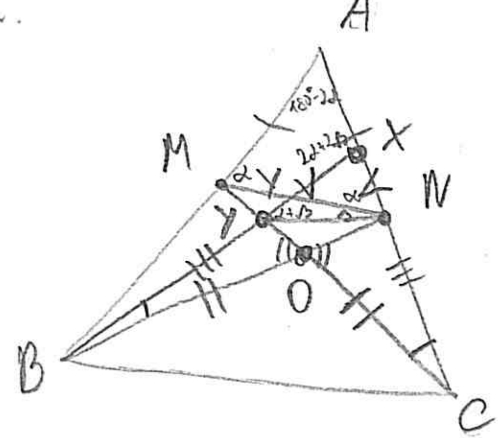
При $a=3 \Rightarrow 6! \cdot 2 = 2160 = 2016+\underbrace{(12)^2}_{144} = 2160 \Rightarrow a=3$ – подходит.

Теперь докажем, что нет подходящих a, которые ≥ 4. Пусть есть $a \geq 4$. $\Rightarrow 2a \geq 8$. Заметим, что левая часть: $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot\underbrace{2a}_{\geq 8}\cdot a = 2016+16a^2$

Возьмём числа: $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot7\cdot2a\cdot a$, т.к. они точно есть в произведении, т.к. $2a \geq 8 \Rightarrow$ есть от 1 до 7. $\Rightarrow \underbrace{720\cdot7}_{5040}\cdot2a\cdot a = 10080a^2 = 2016+16a^2 \Rightarrow 10064a^2 = 2016 \Rightarrow a < 1$, но по предположению $a \geq 4 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ только $a=3$, то т.к. $a=3$, а $k=4a \Rightarrow k=12$.

Ответ: $k=12$.

№2.



Дано:
$\triangle ABC$, т. $M \in$ отр. AB, т. $N \in$ отр. AC, $AM=AN$, отр. $CM \cap$ отр. BN = т. O, $BO=CO$.

Д-ть: $\triangle ABC$ – равнобедренный

№2 (продолжение).

Д-во:

- Докажем, что $\angle ABN = \angle ACM$.
Пусть $\angle ABN \neq \angle ACM \Rightarrow \angle ABN > \angle ACM$ или $\angle ABN < \angle ACM$, но если доказать один случай, то второй доказывается также (только симметричное построение).
- Пусть $\angle ABN > \angle ACM \Rightarrow$ отложим $\angle NBX = \angle ACM$. Луч $BX \cap$ отр. $AN =$ т. X, и луч $BX \cap$ отр. $MO =$ т. Y
- $\angle OBC = \angle OCB$ (т.к. $\triangle BOC$ – равнобедр.)

$\Downarrow$

$\angle XBC = \angle XCB$ (т.к. состоят из =-ых $\angle$-ов) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BXC$ – равнобедренный $\Rightarrow BX = XC$.
- $\angle YOB = \angle NOC$ (по св-ву верт. $\angle$-ов) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BYO = \triangle CNO$ (по II-ому признаку)
В =-ых $\triangle$-ах соотв. элементы =-ы $\Rightarrow BY = CN \Rightarrow$
$\Rightarrow \underset{(BX - BY = XC - CN)}{YX = XN} \Rightarrow \triangle YXN$ – равнобедренный.
- Проведём отрезки MN и YN.
Пусть $\angle AMN = \alpha = \underset{\text{(т.к. равнобедр. }\triangle)}{\angle ANM} \Rightarrow \angle MAN = 180^\circ - 2\alpha$ (т.к. Σ-а $\angle$-ов в $\triangle$-е $= 180^\circ$)
- Пусть $\angle MNY = \beta \Rightarrow \angle XNY = \alpha + \beta = \angle XYN$ (т.к. равнобедр. $\triangle$).
$\angle AXB$ – внешний $\angle$-ол $\triangle$-а $YXN \Rightarrow \angle AXB = 2\alpha + 2\beta$
- Σ-а $\angle$-ов в $\triangle$-е $ABX = 180^\circ \Rightarrow \angle ABX + \angle BAX + \angle AXB = 180^\circ$

$\angle ABX + 180^\circ - 2\alpha + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

$\angle ABX = -2\beta$,

Но т.к. $\underset{\text{(по предполож.)}}{\beta > 0^\circ} \Rightarrow$ получается, что $\angle ABX < 0^\circ$, что неверно $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ неверное предположение $\Rightarrow \angle ABN = \angle ACM \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = \angle ABN + \angle OBC = \angle OCB + \angle ACM = \angle ACB \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный ($AB = AC$).

№3.

Рассмотрим какие цифры есть в числе Лизы: 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Теперь посчитаем сколько чисел, где ровно одна нужная цифра (любая из 1, 2, 4, 5, 7, 8):

Обозначим её через a.

1. $a\,\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5} \Rightarrow 5^4 \cdot 5$ вар., т.к. она может быть 1-ой, 2-ой, ... 5-ой. 5, т.к. кроме данной цифры ещё 5 цифр (других).

2. Где 2-е цифры a:

$aa\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5}$, a5a55, a55a5, a555a, 5aa55, 5a5a5, 5a55a, 55aa5, 55a5a, 555aa $\Rightarrow 5^3 \cdot 10$ вар.

3. Где 3-и цифры a:

aaa55, aa5a5, aa55a, но заметим, что это 2-ой случай, только вместо цифр a у нас цифры другие, то есть не a $\Rightarrow$ 10 вар. (как во 2-ом) $\Rightarrow 5^2 \cdot 10$ вар.

4. Где 4-е цифры a:

aaaa5, aaa5a, aa5aa, a5aaa, 5aaaa $\Rightarrow 5 \cdot 5 = 5^2$ вар.

5. Где 5-ь цифр a:

aaaaa $\Rightarrow$ 1 вар.

Теперь мы знаем сколько чисел и какое кол-во цифр в каждом $\Rightarrow$ посчитаем Σ-у цифр $\Rightarrow$

$$\Sigma\text{-a}: 5^5 \cdot (\underset{3}{1+2}\underset{7}{+4}\underset{12}{+5}\underset{19}{+7}\underset{27}{+8}) \cdot 1 + 5^4 \cdot 2 \cdot (1+2+4+5+7+8) \cdot 2 + 5^3 \cdot 2\,(1+2+4+5+7+8) \cdot 3 +$$

$$+ 5^2 \cdot (1+2+4+5+7+8) \cdot 4 + (1+2+3+4+5+7+8) \cdot 5 = 27 \cdot 5 \cdot (5^4 + 5^3 \cdot 4 + 5^2 \cdot 6 +$$

$$+ 5 \cdot 4 + 1) = 135 \cdot (\underset{1125}{625 + 500} \underset{1275}{+ 150} \underset{1295}{+ 20} \underset{1296}{+ 1}) = 1296 \cdot 135 =$$

$$= 174960$$

$$\begin{array}{r} \times\,1296 \\ 135 \\ \hline 6480 \\ +\;3888 \\ 1296 \\ \hline 174960 \end{array}$$

Ответ: 174960.

№4.

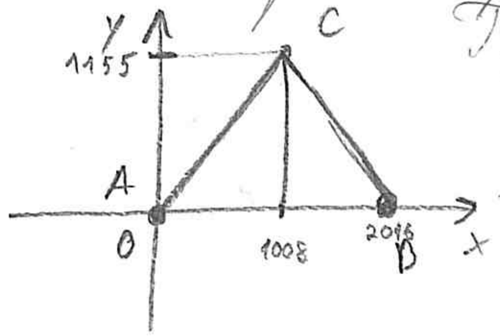
Давайте высчитаем высоту данного Δ-а, проведённую к основанию: $\sqrt{(1533)^2-\left(\frac{2016}{2}\right)^2} = \sqrt{1533^2-1008^2} = \sqrt{(1533-1008)(1533+1008)} =$

$= \sqrt{525\cdot 2541} = \sqrt{5^2\cdot 21\cdot 3\cdot 847} = \sqrt{5^2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 7\cdot 121} = \sqrt{5^2\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 11^2} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{3\cdot 5}_{15}\cdot 7}_{105}\cdot 11}_{1100+55} = 1155.$

$\begin{array}{r} -1533 \\ 1008 \\ \hline 525 \end{array} \quad \begin{array}{r} +1533 \\ 1008 \\ \hline 2541 \end{array}$

Получается, что точка C находится в узле клетки, т.к. по $x = 1008$, а по $y = 1155$. Теперь посчитаем кол-во узлов на боковой стороне:

заметим, что это прямая $y = kx$, если т. A принять за $(0;0)$. Причём эта прямая проходит через т. $(1008; 1155)$.



1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$\Downarrow$

$1155 = k\cdot 1008$

$\Downarrow$

$k = \frac{\cancel{3}\cdot 5\cdot \cancel{7}\cdot 11}{2^4\cdot 3^{\cancel{2}}\cdot \cancel{7}} = \frac{55}{48}$

$\Downarrow$

Каждый раз, когда абсцисса делится на 48, то точка на стороне попадает в узел клетки. $\Rightarrow$ $1008 : 48 = 21$ $\Rightarrow$ между т. A и т. C (по боковой стороне) лежат 20 точек (т.к. 21-ая это т. C), столько же на стороне CB $\Rightarrow$ посчитаем сколько точек на сторонах Δ-а:

$\underbrace{\overset{41}{20+1+20}}_{\text{боковые стороны без т. A и т. B}} + \overset{1}{2017} = 2058.$ — на сторонах Δ-а. Обозначим через b.

т.к. т. A = 0 — 1-ая
1 — 2-ая
2 — 3-ья
...
т. B = 2016 — 2017-ая

$2017 - 1 + 1 = 2017$.

Воспользуемся ф-лой Пика: $a + \frac{b}{2} - 1 = S$, где S — площадь выпуклого мн-ка, вершины которого в узлах клеток, a — кол-во узлов внутри мн-ка, а b — кол-во на сторонах мн-ка.

Для данного Δ-а ABC: $b = 2058$, $S = \frac{1155\cdot 2016}{2} = 1155\cdot 1008$

$a + \frac{2058}{2} - 1 = 1155\cdot 1008 \Leftrightarrow a + \underbrace{1029 - 1}_{1028} = 1155\cdot 1008$

$a = 1155\cdot 1008 - 1028$

$a + b = 1155\cdot 1008 - 1028 + 2058 = 1155\cdot 1008 + 1030 = 1165270$

Ответ: 1165270.

№4 (продолжение)

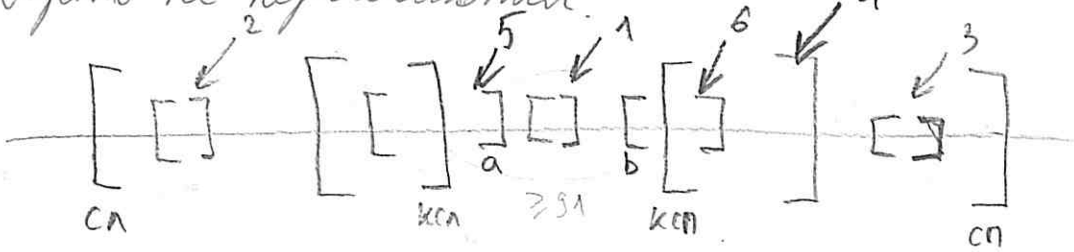
$$\begin{array}{r} 1155 \\ \times\, 1008 \\ \hline 9240 \\ +\,1155 \\ \hline 1164240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1164240 \\ +\quad 1030 \\ \hline 1165270 \end{array}$$

Ответ: 1165270.

№5.

Рассмотрим горизонтальные крайние границы, то есть самую левую и самую правую:

I. Пусть не пересекаются:

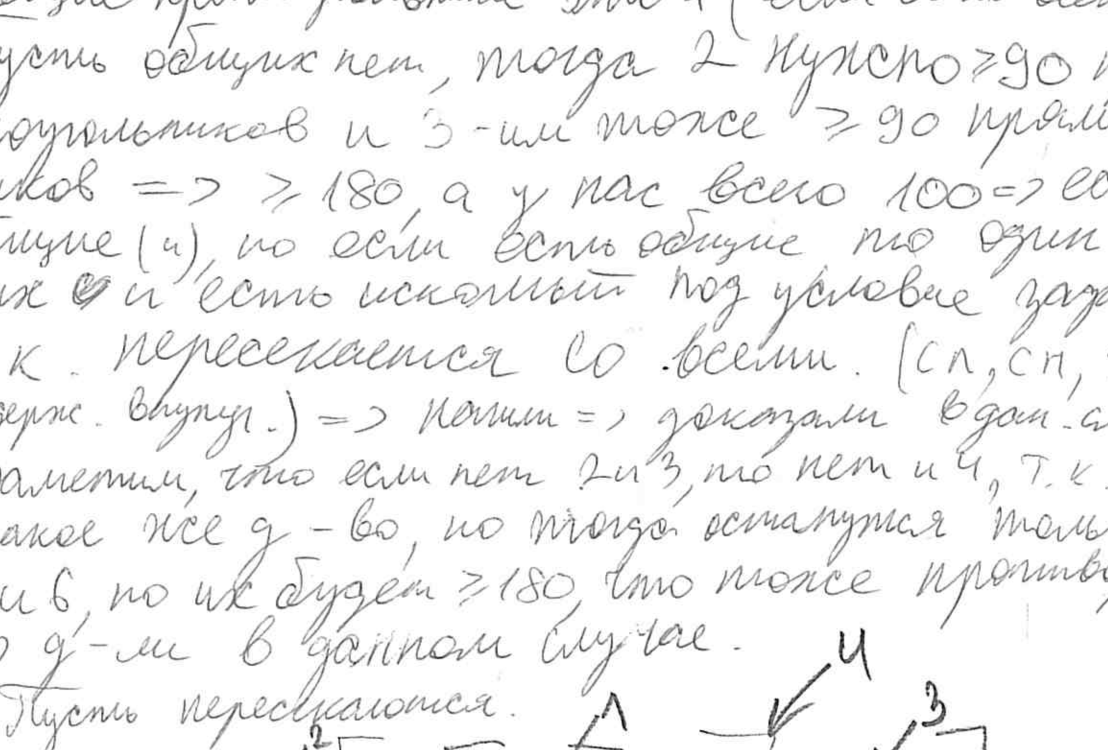


1: $a+b \geq 90$, но тогда 2 и 3 нет 90 пересекающихся прямоугольников, т.к. они (2 и 3) не выходят за сл и сп => нет 1.

2: Заметим, что 2 и 3 существует только одни общие прямоугольники это 4 (если есть общие). Пусть общих нет, тогда 2 нужно ≥90 прямоугольников и 3-им тоже ≥90 прямоугольников => ≥180, а у нас всего 100 => есть общие (4), но если есть общие то один из них и есть искомый под условие задачи, т.к. пересекается со всеми. (сл, сп, 2, 3 и содерж. внутр.) => пошли => доказали в дан. сл.

Заметим, что если нет 2 и 3, то нет и 4, т.к. иначе такое же д-во, но тогда останутся только 5 и 6, но их будет ≥180, что тоже противоречие => => д-ли в данном случае.

II. Пусть пересекаются.



№5 (продолжение).

Заметим, что данный случай не отличается от предыдущего, т.к. пересечения даёт лишь, то, что у некоторых к кол-ву пересечений добавится +2, благодаря кратким, то есть заметим, что у нас есть общие (4), т.к. если их нет, то (2) и (3) не хватит пересечений до ≥ 90 => чтобы противоречить условию (предположим, что оно неверно) нет 2 и 3 и 4 групп прямоугольников. => Один из кратких ~~пр~~ прямоугольников содержит (имеет пересечение) со всеми остальными, т.к. нет 2 и 3 группы => подходит один из кратких ~~пр-ков~~ прямоугольников => => нашли подходящий под условие => доказали.

Ответ: Доказал.