

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2015/2016 учебный год. Заключительный этап

Анкета участника

1. Фамилия, имя, отчество

Дубовик Егор Александрович

2. День, месяц и год рождения

01.01.2000

3. Регион и населённый пункт проживания

Томская область, г. Томск

4. Вы проживаете в сельской местности (да/нет)?

нет

5. Принадлежность к социальной группе с особыми правами

6. Образовательное учреждение

ГКО "Гимназия № 51 г. Томск"

7. Класс

10 А4

8. ФИО учителя математики

Спрук Александр Иванович

9. Занимаетесь ли в математическом кружке, если да – в какой организации
и ФИО руководителя

10. Телефон (мобильный или домашний с кодом города)

+375997284454

11. E-mail

fore78@list.ru

1. Для начала докажем, что, если $A+B+C=180^\circ$, то $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$

$$C=180^\circ-A-B \Rightarrow \operatorname{tg} C = +\operatorname{tg}(180^\circ-A-B) = -\operatorname{tg}(A+B)$$

Заметим, что наша формула равносильна

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \Leftrightarrow \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1} = -\operatorname{tg}(A+B) \quad (\text{по формуле тангенса суммы})$$

Кроме того, что $A, B, C \neq 90^\circ$, но ~~не нужно~~ так как в эту сумму тангенс не входит.

Пусть C максимальный угол. Тогда, если C тупой,

$$\text{то } \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C < 0, \text{ т.к. } \operatorname{tg} C < 0, \text{ а } \operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B > 0$$

$$C \neq B \quad A < 180^\circ - C < 90^\circ, \quad B < 180^\circ - C < 90^\circ,$$

$$\text{но } \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2016 = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C > 0 - \text{противоречие.}$$

Значит, C — острый.

но тогда!

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \leq 3 \operatorname{tg} C \Rightarrow \operatorname{tg} C \geq \frac{2016}{3} \Rightarrow C \rightarrow 90^\circ$$

Отсюда $C \rightarrow 90^\circ$.

3. Заметим, что $n=1$ решение. Докажем, что оно единственно.

Заметим, что, если $n \geq 3$, то

$$2^n + n^{2016} = \left(2^{\frac{n}{3}} + n^{672}\right) \left(2^{\frac{2n}{3}} + n^{672} \cdot 2^{\frac{n}{3}} + n^{672 \cdot 2}\right)$$

Но, тогда $2^n + n^{2016} : 2^{\frac{n}{3}} + n^{672} \in \mathbb{N}$, следовательно, то

$$2^n + n^{2016} > 2^{\frac{n}{3}} + n^{672} > 1 \Rightarrow 2^n + n^{2016} \text{ не простое}$$

т.е. при $n > 1$ $2^n + n^{2016} > 3$, то $2^n + n^{2016} \neq 3$.

Заметим, что при $n \not\equiv 3$ $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ~~или~~ $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ или

$$n \equiv 1 \pmod{3}, \text{ то } n^2 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{3}, n \equiv 2 \pmod{3}$$

$$n^2 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\text{Тогда } n^{2016} = (n^2)^{1008} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\text{Значит } n^{2016} + 2^n \not\equiv 3 \Leftrightarrow 2^n \not\equiv 2 \pmod{3}$$

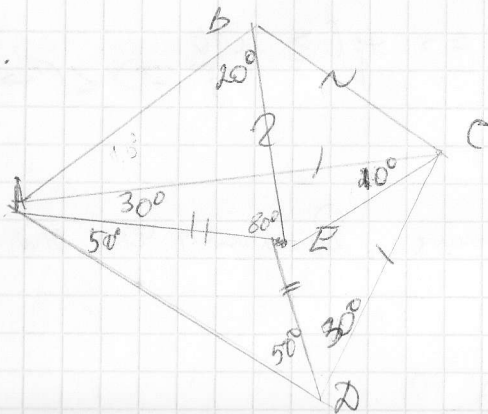
$$\text{При } n = 2k \quad 2^n = 2^{2k} = (4)^k \equiv 1 \pmod{3}$$

$$n = 2k+1 \quad 2^{2k+1} = 2^{2k} \cdot 2 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow n = 2k$$

Но, тогда $2^n + n^{2016} : 2 \in \mathbb{N}$ и $2^n + n^{2016} > 2$ — простое —
нельзя.

Ответ: $n = 1$.

4.



Дано:

$$\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$$

$$\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$$

$$\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$$

Доказано:

$\triangle BEC$ — равнобедренный

Решение

$$\angle BAC = \angle B$$

$$\angle CAE = \angle CAD - \angle EAD = 30^\circ$$

$$\angle EDC = \angle ADC - \angle ADE = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Тогда } \angle AEC =$$

$\triangle ACD$ — равнобедренный, т.к. углы при основании равны ($\angle CAD = \angle CDA$)

$$\text{Аналогично, } AE = ED$$

Тогда, $\triangle ACE = \triangle EDC$ по 2 сторонам и углу между ними.

$$\text{Значит, } \angle ACE = \angle EDC = \frac{\angle ACD}{2}$$

$$\angle AED = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ \text{ (из } \triangle AED)$$

$$\angle ACE = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

$$\angle BAC = \angle BAE - \angle EAC = 50^\circ$$

$\triangle BAE$ равнобедренный ($\angle BAE = \angle AEB$).

$$\angle ABE = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ \text{ (из } \triangle ABE)$$

Оценим окружность около $\triangle ACE$. Тогда, пусть B' ее центр. т.к. E равноудален от A и C , то B' лежит на биссектрисе $\angle AEC$. Кроме, она

лежит на серединном перпендикуляре к AE
 и $\angle AB'E = 2\angle ACE = 20^\circ = \angle ABE$ ($\angle AB'E = 2\angle ACE$
 т.к. это центральный и вписанный углы с общей
 дугой). Значит, ~~треугольник~~ очевидно, что линия
 точно ермеевская (это, например, верно, потому
 что если B' лежит внутри $\triangle ABE$, то $\angle AB'E >$
 $> \angle ABE$ и наоборот), значит $B = B'$. Тогда, $BE = BC$
 и $\angle EBC = 2\angle EAC = 60^\circ$.

5. Подсчитаем число ^{формированных} троек чисел каково
 получится. Т.к. ~~число~~ все числа различны,
 то не переставляя ~~или~~ 3-х чисел 6 , то
 число сетей ~~будет~~ мы получим, если разделим
~~число троек на 6~~
 число троек на 6 , поэтому, достаточно сравнить
 число троек.

Тройка считается 0 т.к. в ней нет
 все числа совпадают

Тройка считается 1 будет $4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ — это
 верно, т.к. у нас есть 4 варианта
 выбрать разряд, где все 3 числа отличаются. Затем,

6 перестановок чисел $1, 4, 3$ в том разряде и
 3 варианта (или 3 комбинации) чисел $1, 4, 3$
 1 или 2, или 3 / стоят в том разряде где
 не было разряда.

Тройка считается 2 :

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3$$

6 — вариантов выбрать 2 разряда, где стоят
 разряды ($C_4^2 = 6$), 6 перестановок для каждого,
 по 3 варианта (или ~~число~~ чисел) для каждого из 2
 оставшихся.

Тройка считается 3 :

$$4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3$$

Т.к. $C_4^3 = 4$, то есть 4 варианта выбрать
 3 разряда, где разное число, и 3 варианта
 для оставленного разряда, и 6 перестановок в 3
 разрядах

Тройка считается 4 :

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$$

по 6 вариантов для каждого из разрядов.

$$4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 > 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 6 \cdot 6 \cdot 6 > 3 \cdot 3 \text{ — верно.}$$

$$4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 > 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 12 > 9 \text{ — верно.}$$

$$4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 > 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \Leftrightarrow 4 \cdot 9 > 6.$$

Значит, трех сложностей 3 больше всего.

Значит, а еще сложности 3 больше всего.