①

$\left(\frac{k}{2}\right)!\left(\frac{k}{4}\right)=2016+k^2$

Т.к. факториал определен только для целых неотрицательных чисел, то k – четное число. $k=0$ – решением не является.

$\left(\frac{k}{2}\right)!\left(\frac{k}{4}\right)=2016+k^2$

$\left(\frac{k}{2}-1\right)!\cdot\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{4}=k^2+2016$

$\frac{k^2}{8}\left(\frac{k}{2}-1\right)!-k^2=2016$

$k^2\left(\frac{1}{8}\left(\frac{k}{2}-1\right)!-1\right)=2016$

В левой части уравнения находится постоянно возрастающая величина (при увеличении k), в правой части – фиксированное число. Поэтому решение у этого уравнения максимум одно.
Остается найти его:

$k=2:\ 1!\cdot\frac{1}{2}\neq 2016+4$ – не является решением

$k=4:\ 2!\cdot 1\neq 2016+16$ – не является решением

$k=6:\ 3!\cdot\frac{6}{4}\neq 2016+36$ – не является решением

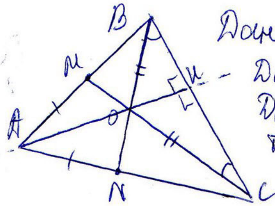
$k=8:\ 4!\cdot 2\neq 2016+64$ – не является решением

$k=10:\ 5!\cdot\frac{10}{4}\neq 2016+100$ – не является решением

$k=12:\ 6!\cdot 3 = 2016+144$ – подходящее

Ответ: $k=12$.

②



Дано: $\triangle ABC$, $M\in AB$, $N\in AC$, $AM=AN$, $BN\cap CM=O$, $BO=CO$

Доказать: $\triangle ABC$ – равнобедренный

Доказательство:

Т.к. через две любые точки можно провести прямую, то проведем ее через точки A и O. Она пересечет сторону BC в точке K. $\triangle BOC$ – равнобедренный ($BO=CO$ (усл.))

Рассмотрим $\triangle BOK$ и $\triangle COK$. OK – общая, $BO=CO$, $\angle OBC=\angle OCB$ $\Rightarrow$ $\triangle BOK=\triangle COK$ по I признаку. Исходя из этого равенства, $BK=KC$ $\Rightarrow$ OK – медиана в $\triangle BOC$, а AK, соответственно, медиана в $\triangle ABC$.

Т.к. $\triangle BOC$ – равнобедренный, то медиана OK также биссектриса и высота.

Рассмотрим $\triangle ABK$ и $\triangle ACK$. $\angle AKC=\angle AKB=90^\circ$ (AK – высота), AK – общая, $BK=KC$, как мы выяснили ранее $\Rightarrow$ $\triangle ABK=\triangle ACK$ $\Rightarrow$ $\angle BAK=\angle CAK$ $\Rightarrow$ AK – биссектриса $\triangle ABC$.

Т.к. AK – медиана, биссектриса и высота $\triangle ABC$, то $\triangle ABC$ является равнобедренным.

Доказательство завершено.

③

Найдём, сколько существует чисел, которые нравятся Лидии. В их записи используется 6 цифр – 1, 2, 4, 5, 7, 8 (0, 3, 6, 9 не используются, т.к. делятся на 3). Поэтому:

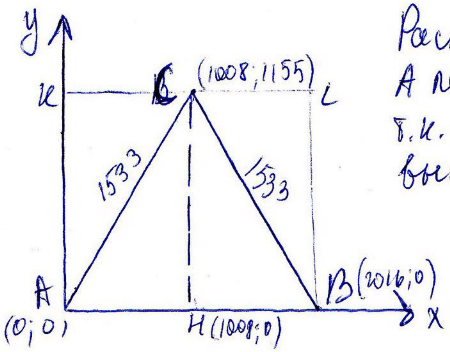
$\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6} = 6^5$ чисел

В каждой позиции (из 5) встречаются все нужные цифры (1, 2, 4, 5, 7, 8) с одинаковой частотой, т.е. по $\frac{6^5}{6} = 6^4 = 1296$ раз

Общая сумма цифр: $1296\cdot(1+2+4+5+7+8)\cdot 5 = 5\cdot 1296\cdot 27 = 174960$

Ответ: 174960

④



Расположим данный треугольник так, что точка A лежит в точке (0;0), а точка B в точке (2016;0), т.к. ΔABC равнобедренный, то $C\left(\frac{2016}{2}; y\right)$ (т.к. CH – высота и медиана).

По Т. Пифагора найдем y:

$1008^2 + y^2 = 1533^2$

$y^2 = (1533-1008)(1533+1008)$

$y = 525\cdot 2541 \Rightarrow y = 1155$

Итак, по формуле Пика $S_{\Delta ABC}$ равна

$S = B + \frac{Г}{2} - 1$; где B – кол-во узлов внутри треугольника, Г – кол-во узлов на границе

Найдем S по формуле Герона и кол-во узлов на границе:

$S = \sqrt{2541(2541-1533)(2541-1533)(2541-2016)} = \sqrt{2541\cdot 1008\cdot 1008\cdot 525} =$
$= 1155\cdot 1008 = 1164240$

1) Рассмотрим прямоугольник AKCH: AC в нем диагональ, поэтому между A и C, не включая A: $1 + НОД(1008; 1155) - 1 = 21$ клетка в узлах

2) Рассмотрим прямоуг. CLBH: CB – диагональ, поэтому между C и B, не включая B и C: $НОД(1155; 1008) - 1 = 21 - 1 = 20$ клеток в узлах

3) На AB лежит 2017 клеток в узлах (включая A и B). Итак:

$B = S - \frac{Г}{2} + 1 = 1164240 - \frac{2017+21+20}{2} + 1 = 1164240 - 1029 + 1 = 1163212$

Итого в ΔABC лежит $Г + B = 1163212 + 2017 + 21 + 20 = 1165270$ узлов