№1

Сначала заметим, что k - чётное (либо 0) т.к. факториал определён только для натуральных чисел и 0, $\Rightarrow \frac{k}{2}$ - целое $\Rightarrow k$ - чётное.

Так-же рассмотрим, какие остатки может давать k^2 при делении на 11:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0
k^2	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1	0

Среди остатков k^2 при делении на 11 нет остатка 8 $\Rightarrow (2016+k^2) \not\vdots\, 11$ (т.к. $2016 \underset{11}{\equiv} 3$, а $k^2 \underset{11}{\not\equiv} 8$).

Если $k \geq 22$, то $\left(\frac{k}{2}\right)! \vdots 11 \Rightarrow \left(\frac{k}{2}\right)! \cdot \left(\frac{k}{4}\right) \vdots 11$. Но $2016 \not\vdots\, 11$.

Значит $k < 22$. Теперь мы можем оценить левую часть:

$$2016 \leq \left(\frac{k}{2}\right)! \cdot \left(\frac{k}{4}\right) \leq 2016 + 22^2 = 2500$$

Заметим, что при $k=10$ $\left(\frac{k}{2}\right)! \cdot \left(\frac{k}{4}\right) = 120 \cdot 2{,}5 = 300 < 2016$

При $k=14$ $\left(\frac{k}{2}\right)! \cdot \frac{k}{4} = 5040 \cdot 3{,}5 > 2500$.

Значит, k чётное и $10 < k < 14 \Rightarrow k = 12$. Действительно, при $k=12$:

$\left(\frac{12}{2}\right)! \cdot \frac{12}{4} = 2016 + 12^2$

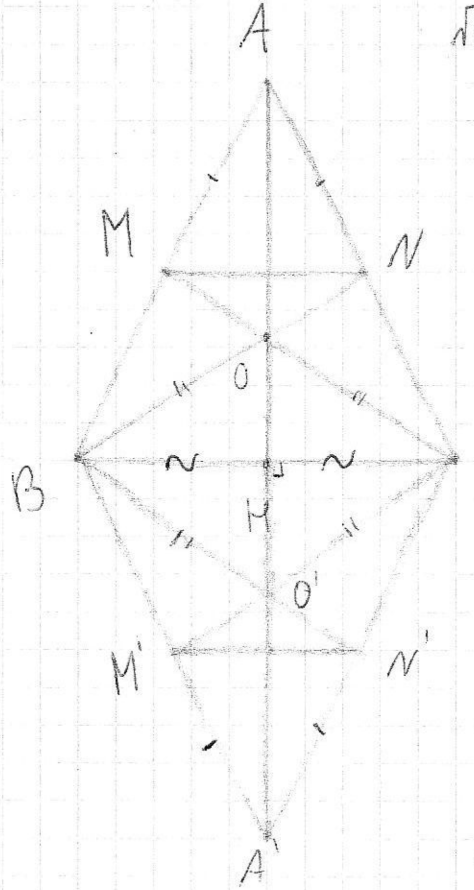
$6! \cdot 3 = 2160$

$720 \cdot 3 = 2160$

$2160 = 2160$, правда

Ответ: $k = 12$

№ 62



Дано:

$\triangle ABC$

$AM = AN$

$BO = CO$

Доказать:

$AB = AC$

Решение:

1) Отразим вершину A относительно BC. Получившуюся точку назову A'. Треугольники ABC и $A'BC$ равны ($AB = BA'$, $AC = A'C$ т.к. A симм. A' относительно BC, и отрезок BC общий).

2) Отмечу на $\triangle A'BC$ точки M', N' и O' (ясно, что сохранятся все отношения из $\triangle ABC$), т.е. $AM' = AN'$ и $BO' = CO'$.

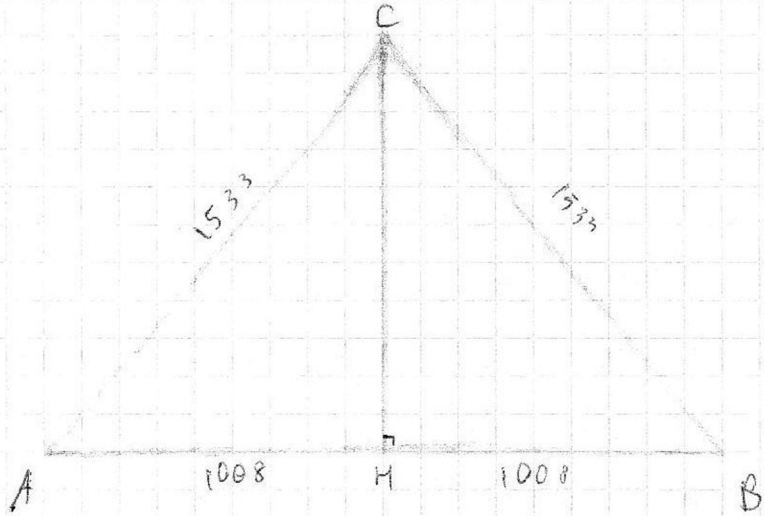
3) Заметим, что $OBO'C$ - ромб, а диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Пусть точка пересечения BC и OO' - H.

№3

Цифр, которые не делятся на 3 - шесть: 1, 2, 4, 5, 7, 8

Если 1-ца первая, то на оставшиеся 4 места можно поставить любую из 6-ти цифр. Т.е. чисел с 1 вначале: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$. Аналогично для случаев, когда 1 на 2-м месте 1296 и т.д. Значит всего единиц в числах, которые нравятся Лидии $1296 \cdot 5 = 6480$. Аналогично для 2, 4, 5, 7 и 8. Значит каждая из цифр! 3 встречается 6480 раз. А значит общая сумма: $(1+2+4+5+7+8) \cdot 6480 =$ $= 27 \cdot 6480 = 174960$ (вычисления в черновике).

№4



Проведём высоту CH. Из т-мы Пифагора:

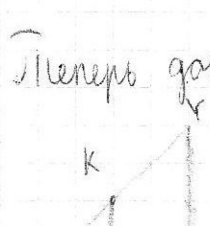
$AH^2 + CH^2 = AC^2$

$1533^2 - 1008^2 = CH^2$

$CH^2 = (1533-1008)(1533+1008) = 25 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 121$

$CH = 5 \cdot 21 \cdot 11 = 1155$

Теперь докажем лемму (~~треуго~~ катеты Δ параллельны коорд. осям):



Если на гипотенузе прямоугольного тр-ка есть узел в точке K, то проекция отрезка KX на

катет x_2 умноженная на $tg\angle X$ - целое.
Это следует из того, что узел лежит на целочисленных координатах. => KL - целое. $tg\angle X = \frac{KL}{XL}$.
Значит $XL \cdot \frac{KL}{XL}$ должно быть целым, что верно

Найдем корни уравнения $x \cdot \frac{1155}{1008}$ - целое, где $x \le 1008$
$\frac{1155}{1008} = \frac{55}{48}$. $\frac{55x}{48}$ целое при $x \vdots 48$. До 1008 всего

22 числа, кратных 48 (включая 0 и 1008). Значит на AC - 22 узла. Из них 2 в вершинах A и C.

Итого на сторонах вершин: **2017** (на AB) +
22$\cdot$2 (на AC и CB) - 3 (узлы A, B и C посчитаны по 2 раза) =
= 2058.

$S_{ABC} = 2016 \cdot 1155 : 2 = 1164240$ (вычисления в черновике)
Из формулы **Пика**: $S = V + \frac{S}{2} - 1$, где V - узлы внутри фигуры, S - на сторонах.

$V + \frac{2058}{2} - 1 = 1164240$
$V = 1163212$

$V + S = 1163212 + 2058 =$ **1165270**, что нам и требовалось найти.