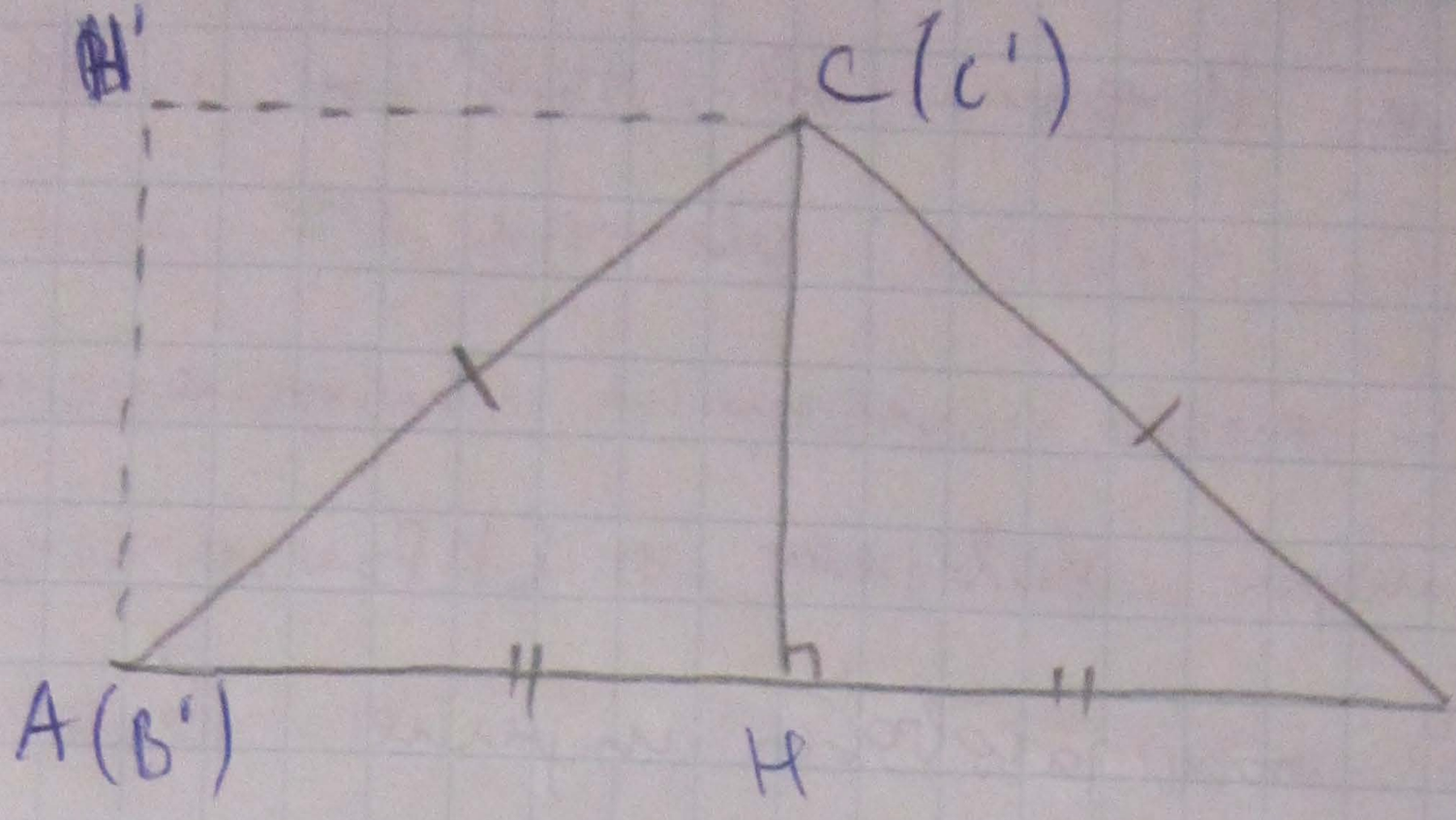
3. Расположим все числа, которые нравятся Лидии, в столбик. Заметим, что каждое из этих чисел не содержит цифры 0, 3, 6, 9 и может содержать любые другие. Всего таких пятизначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8, равно 6^5, т.к. на первом месте может стоять любая цифра, на втором тоже, на третьем, четвертом и пятом также любая из 6 цифр. П. и все числа равноправны, то кол-во чисел оканчивающихся на цифру 1 равно $\frac{6^5}{6} = 6^4$. аналогично для чисел оканчивающихся на 2, 4, 5, 7, 8. Посчитаем общую сумму последних цифр у чисел: $6^4 \cdot 1 + 6^4 \cdot 2 + 6^4 \cdot 4 + 6^4 \cdot 5 + 6^4 \cdot 7 + 6^4 \cdot 8 = 6^4 (1+2+4+5+7+8) = 6^4 \cdot 27 = 2^4 \cdot 3^7$. Аналогичные рассуждения проведем для предпоследней цифры,

для 3-ей, для 2-ой и для 1-ой.
Получим, что сумма всех цифр в таких числах равна: $5 \cdot 2^4 \cdot 3^7$

Ответ: $2^4 \cdot 3^7 \cdot 5$

4.



Дано: $AC = BC = 1533$, $AB = 2016$.

Найти кол-во узлов внутри треуг..

Решение: Т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный, по перпендикуляр, опущенный из вершины C на сторону AB, является медианой в $\triangle ABC \Rightarrow AH = HB = 1008$.

Т.к. A и B лежат на одной горизонтали, а $CH \perp AB$, то C и H лежат на одной вертикали. Найдем длину отрезка CH по теореме Пифагора:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = (AC + AH)(AC - AH) =$$

$$= (1533 + 1008)(1533 - 1008) = 2541 \cdot 525 =$$

$$= 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)^2 \Rightarrow$$

$$CH = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$$

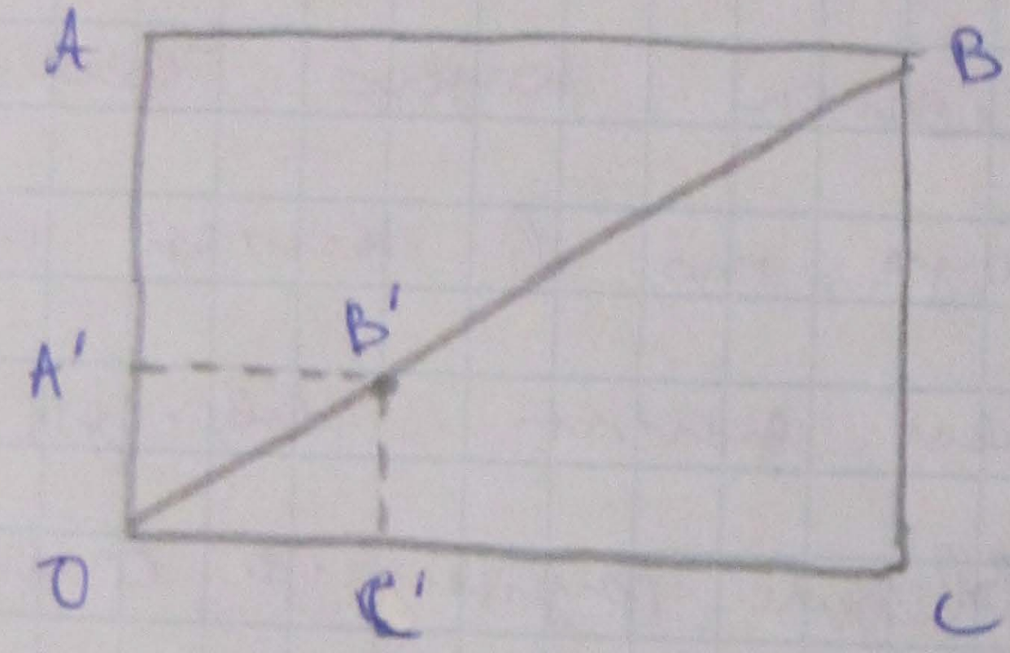
Т.к. И-целая на узле и СН-целое

☺

С точки зрения в узле плоскости. Теперь повернем $\triangle CHB$ на угол $90°$ так, чтобы точка B' совпала с точкой A. При таком повороте все горизонтали перейдут в вертикали, все вертикали перейдут в горизонтали, и значит все узлы перейдут в узлы. При таком повороте образуется прямоугольник $AHCH'$, кол-во узлов в котором равно кол-ву узлов в $\triangle ABC$ (т.к. кол-во узлов в $\triangle AH'C$ равно кол-ву узлов в $\triangle BHC$). Посчитаем кол-во узлов в таком прямоугольнике. Для этого посчитаем кол-во узлов на диагонали. Докажем лемму.

<u>Лемма</u>. Кол-во узлов на диагонали клетчатого прямоугольника со сторонами m и n равно $НОД(m,n)+1$

Заметим, что кол-во узлов на диагонали не меньше $НОД(m,n)+1$, т.к. при попытке с центром в конце диагонали и с коэффициентом $\frac{1}{НОД(m,n)}$ прямоуг. перейдет в подобный ему прямоуг. со сторонами $\frac{m}{НОД(m,n)}$, $\frac{n}{НОД(m,n)}$, лежащими на линиях сетки, причем второй конец диагонали маленького прямоуг. лежит в узле (см. рис):



Если же мы прямоуг. $OA'B'C'$ перенесем на вектор $\overrightarrow{OB'}$ $НОД(m,n)-1$ раз, то получим $НОД(m,n)$ одинаковых прямоугольников лежащих не диагонали, с вершинами в узлах сетки, т.е. суммарно лежащих $НОД(m,n)+1$ узел на диагонали.

Пусть одну $> НОД(m,n)+1$ узлов на диагонали, тогда одну 2 узла на диагонали расстояние между которыми наименьшее. Возьмем это расстояние и будем откладывать отрезки данной длины на диагонали начиная от вершины прямоуг., тогда, т.к. это расстояние меньше расстояния диагонали прямоуг. со сторонами $\frac{m}{НОД(m,n)}$, $\frac{n}{НОД(m,n)}$. Тогда, т.к. оно не может нацело делить диагональ прямоуг., то в конце останется отрезок меньшей длины между узлами. Противоречие. Введем функцию, считающую кол-во узлов на отрезке или внутри фигуры, обозначаемую буквой P.

Тогда, кол-во узлов лежащих в $\triangle ABC$ равно

$P(ABC) = P(AHC) + P(CHB) - P(CH)$, т.к.

$P(AHCH') = P(AHC) + P(ACH') - P(AC) = 1009 \cdot 1156$

Но, пользуясь леммой, получим

$P(AC) = 22$

$P(ABC) = P(AH \cup CH') + P(AC) - P(CH)$, т.к.

$P(ACH') = P(CHB)$.

⇓

$P(ABC) = 1009 \cdot 1156 + 22 - 1156 \cdot =$

$1008 \cdot 1156 + 22$

Ответ: $1008 \cdot 1156 + 22$

1. $(k/2)!\,(k/4) = 2016 + k^2$, где $k \in Z$, $k \geq 0$.

Т.к. факториал определен только для целых, значит $k/2$ - целое, значит $k/2$ на a, где $a \in Z$ и $a \geq 0$.

Перепишем ур-е:

$$a! \cdot \frac{a}{2} = 2016 + (2a)^2$$

$$a! \cdot \frac{a}{2} = 2016 + 4a^2$$

Т.к. $a \neq 0$ (легко убедиться подставив значение), то левая и правая части делятся на a^2:

$$(a-1)!/2 = \frac{2016}{a^2} + 4$$

Умножим равенство на 2:

$$(a-1)! = \frac{2016 \cdot 2}{a^2} + 8$$

$$(a-1)! = \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7}{a^2} + 8$$

Т.к. в левой части целое число, то и в правой целое. $\Rightarrow$ a^2 может быть равен $1; 2^2; 2^4; 2^6; 2^2 \cdot 3^2; 2^4 \cdot 3^2; 2^6 \cdot 3^2$. Т.к. число справа не кратно 7, то $a - 1 \leq 6 \Rightarrow a \leq 7 \Rightarrow$

а может быть равно $1; 2; 2^2; 2 \cdot 3$.

Подставим и проверим уравнение:

$a=1$: $0! \neq 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 + 8$

$a=2$: $1! \neq 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 + 8$

$a=4$: $3! \neq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 + 8$

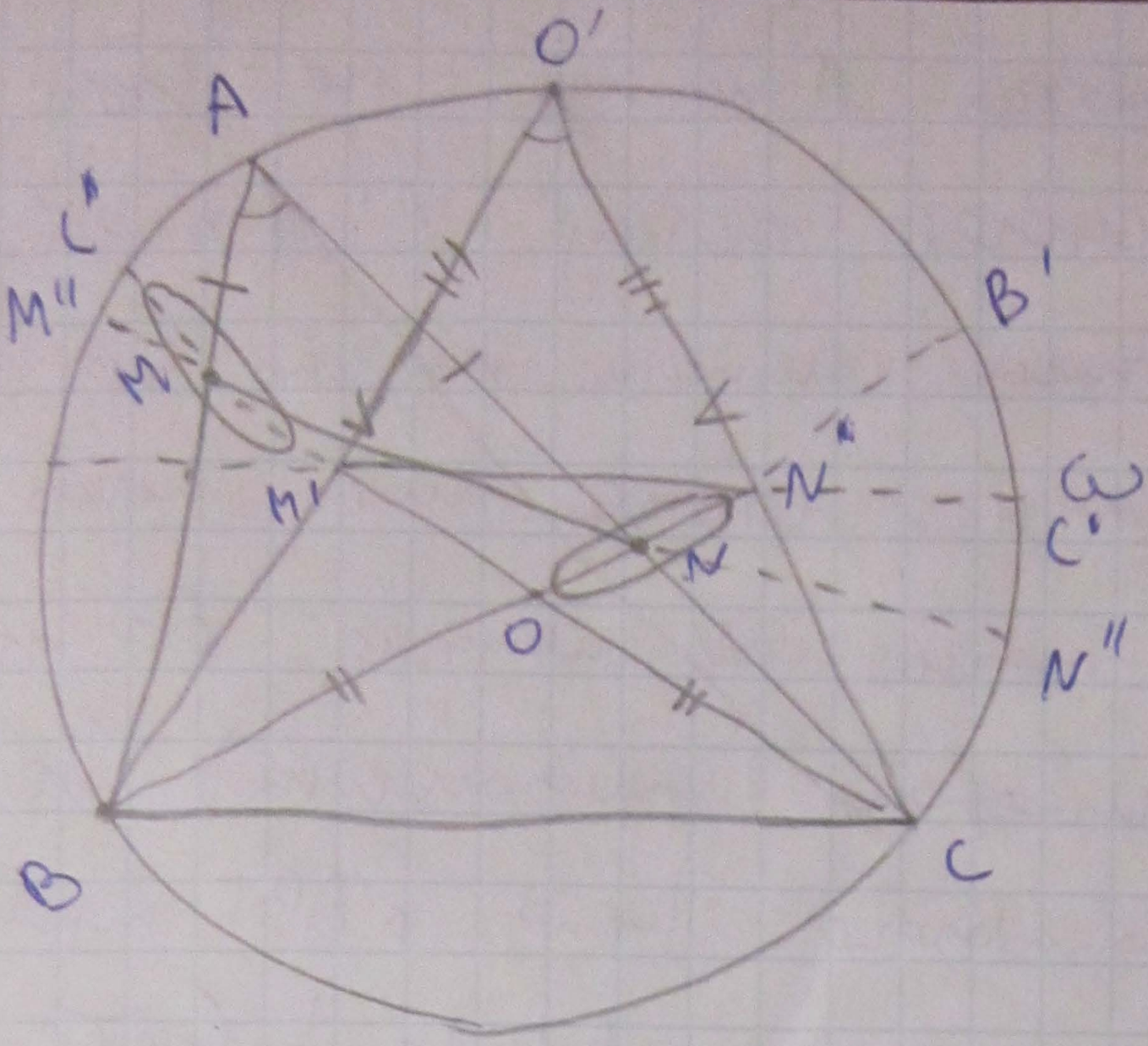
$a=6$: $5! = 2^4 \cdot 7 + 8 = 120$.

$\Downarrow$

$k = 12$.

Ответ: $k = 12$.

2.



Дано: $AM = AN$, $BO = CO$.

Док-ать: $\triangle ABC$ - равнобед.

Док-во: Опишем около $\triangle ABC$ окружность ω. Отметим точку O' - середину дуги $\overset{\frown}{BAC}$. Тогда, $\triangle BO'C$ - равнобед. => точка O лежит на высоте опущ. из точки O' на BC. => OO' - ось симметрии $\triangle BO'C$ => $O'M' = N'O'$. => $\triangle AMN \sim \triangle O'M'N'$, т.к. они равнобед. и угол одинаковый напротив основания. => $\angle MNA = \angle M'N'O'$.

Не умоляя общности, будем полагать,

что точка A летит на дуге $C'O'$, не выпуская точку C' (точка A может летать только на дуге $B'C'$, т.к. иначе либо точка M, либо точка N летала бы не на стороне треугольника). Пойдем от противного. Пусть $\triangle ABC$ неравнобедренный. Заметим, что $\angle ANM = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CN''} + \overset{\frown}{AM''})$

Заметим, что точка M находится на интервале $M'C'$, а точка N на интервале $ON' \Rightarrow N''$ летит внутри дуги $\overset{\frown}{CC'}$ (т.к. иначе точки пересеч. прямой MN с прямыми $M'N'$ и $C'C'$). Аналогично, точка M'' летит внутри дуги $\overset{\frown}{AB'} \Rightarrow \overset{\frown}{AM''} < \overset{\frown}{B'A}$ и

$$\angle CN'' < \angle CC'$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AM''} + \overset{\frown}{CN''}) < \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{CC'})$$

$$\Downarrow$$

$$\angle ANM'' < \angle O'N'M'$$

Противоречие. Ч.т.д.

5. Пусть найдутся два непересекающихся прямоугольника, ведь иначе каждый прямоуг. пересек. с четырьмя. Рассмотрим два случая: когда их проекции на ось OX пересекаются и их проекции на ось OY пересекаются и когда только на одну ось проекции пересекаются. Рассмотрим первый случай:

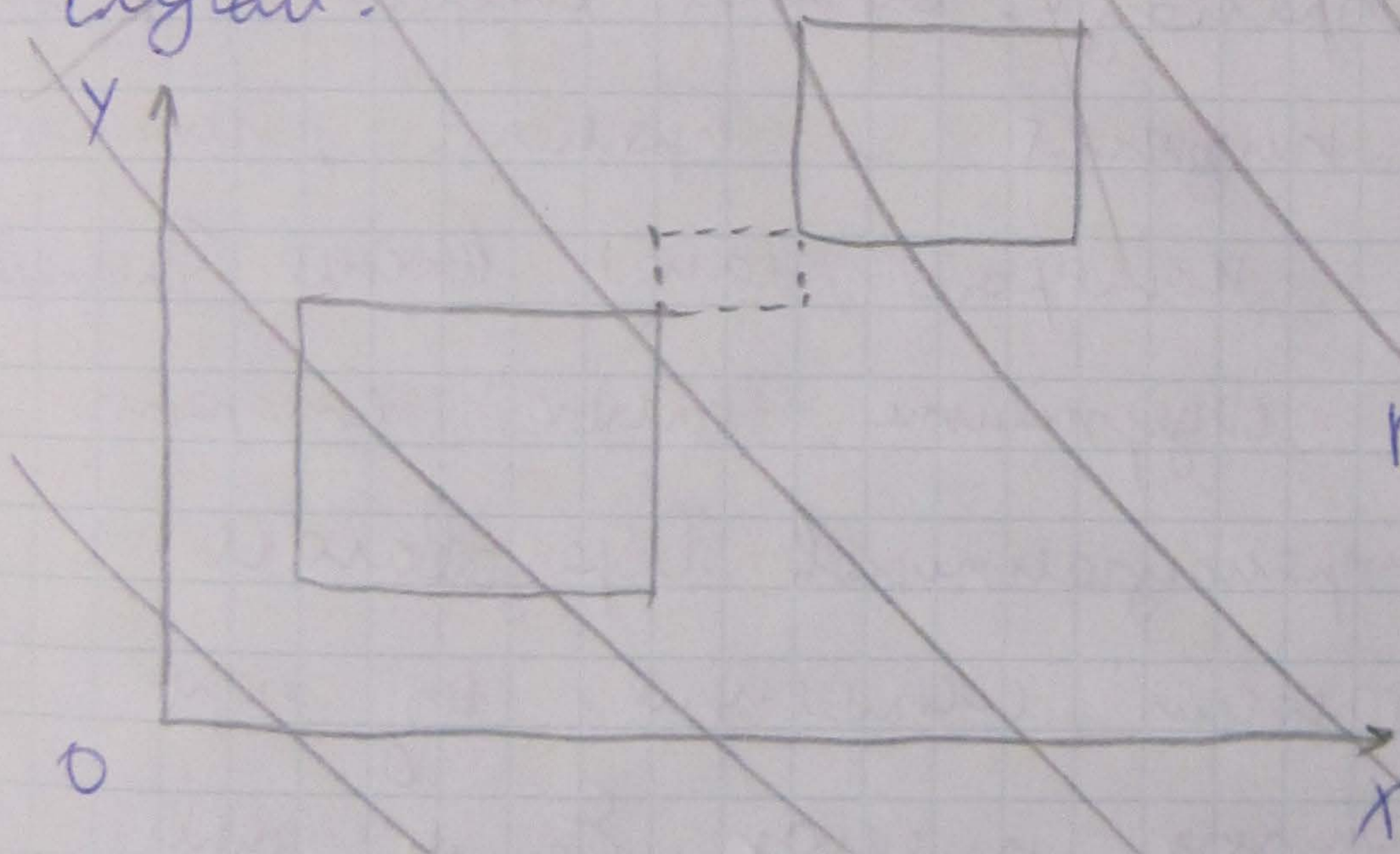


рис. 1.

Обозначим кол-во прямоуг. пересекающих оба прямоуг.: за a, первый прямоуг. - b, второй - c и непересекающие ни один - d. Тогда, $a+b+c+d=98$; $a+b \geq 90$; $a+c \geq 90 \Rightarrow 2a+b+c \geq 180 \Rightarrow$

$a+d \geq 180-98 = 82. \Rightarrow a \geq 82.$

Заметим, что прямоуг. пересек. обе прямоуг. пересекающего других, т.к. все они содержат прямоуг. обведенный пунктиром (см. рис1). Найдем среди всех (прямоуг.) прямоугольников прямоугольник, у которого левая сторона самая правая, прямоуг., правая сторона которого самая левая, прямоуг., верхняя сторона которого самая нижняя и прямоуг., нижняя сторона которого самая верхняя. Проведем прямые, содержащие "самые" стороны этих прямоугольников. Образовалось две "полосы", состоящие из пары параллельных прямых. Если три сущ. расположения этих прямоуг. с "полосами":

1)

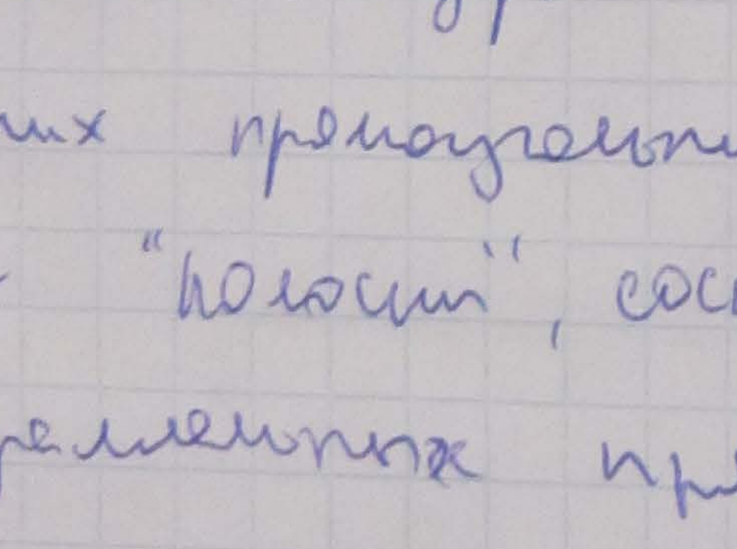


рис. 2

- каждый прямоуг. "касается" (площадь пересеч. левее 0) "полосы", образов.

Этим прямую.

2)

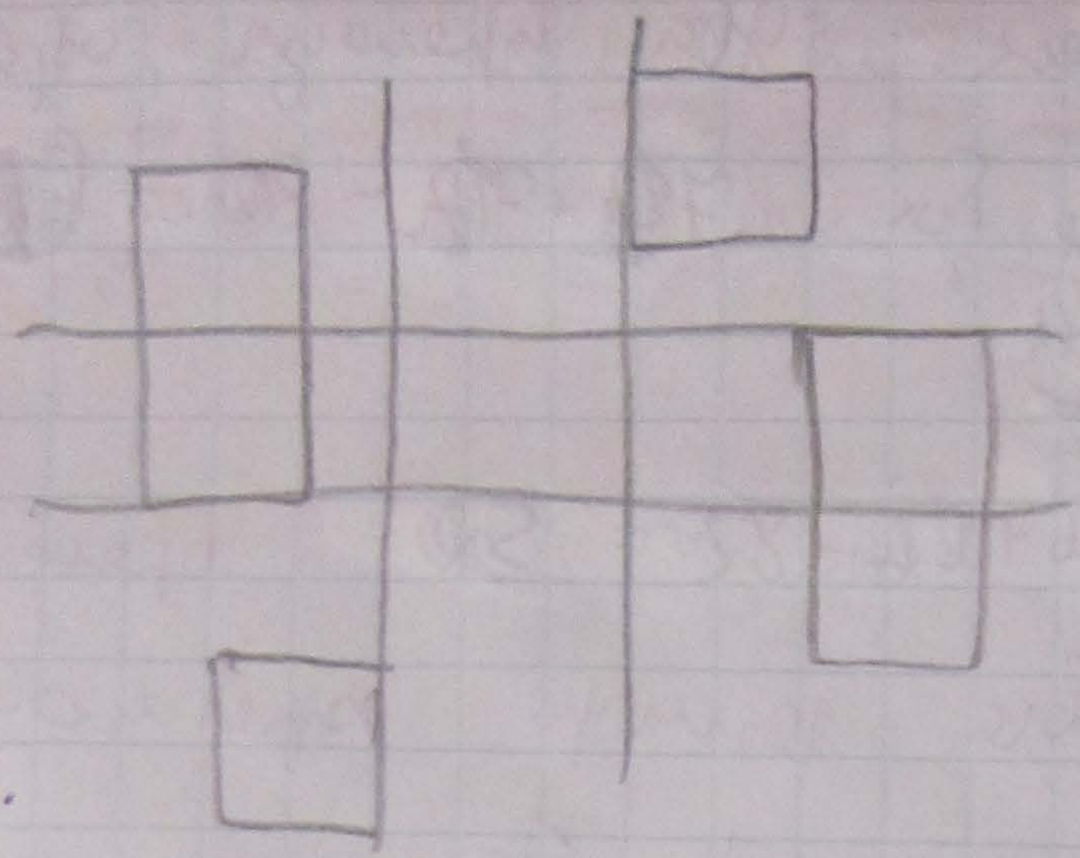


рис. 3.

- два прямых. "касаются" "своей" "полосы", а две другие "пересекают" (делят "полосу" на две бесконечные части) "свою" "полосу".

3)

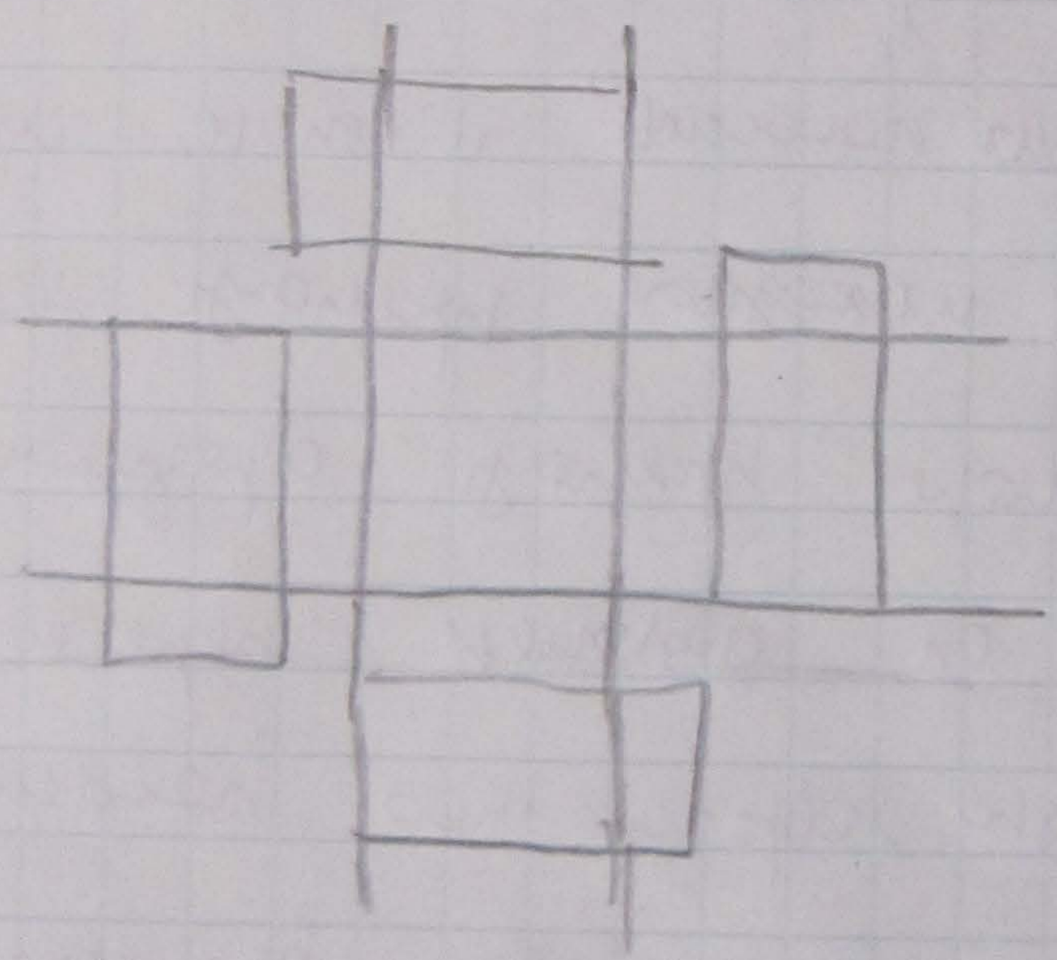


рис 4.

- все прямые. "пересекают" "свои" "полосы".

Возьмем прямую, образующий одну из "полосы". Его пересекает не менее $90 - 18 = 72$ прямых, пересекающих эту прямую $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Две прямые, образующих "полосу" пересекают не менее $72 + 72 - 82 - 2 = 60$

(исключим этот случай позже) прямых, пересек. Изначально прямых $\Rightarrow$ не менее $60+60-32$ пересечения и прямых, ограничивающих "полосу".

Существует хотя бы 30 прямых, пересекающих все четыре ограничивающих "полосы". Рассмотрим случай 1) (см. рис. 2). В нем каждая прямая (кроме первых двух) должна "пересекать" обе "полосы" и т.к. существ. прямых пересек исходные прямые, которая пересекает четыре прямых, образующие "полосы", то он должен пересекать каждую прямую, образующую "полосу", значит он полностью покрывает прямых. пересечения "полосы", значит он пересекает все прямые. Рассмотрим случай 3) (см. рис. 4). В ней каждая прямых. "пересекает" каждую "полосу" $\Rightarrow$ каждая прямая содержит в себе

прямоуг., образованный пересечением "полос".

Любой прямоуг. пересек. изначальные прямоуг. пересекает все прямоуг.

Рассмотрим случай 2) (см. рис 3).

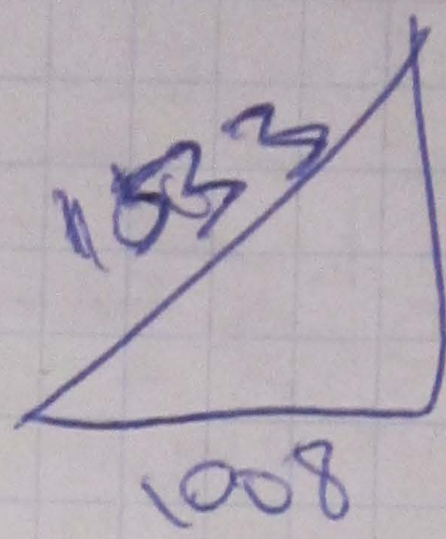
Каждый прямоугольник "пересекает" одну "полосу" и "задевает" (имеет общий отрезок) другую. Причем все прямоуг. "пересекают" "полосу", которую "пересекают" ее образующие прямоуг..

Прямоуг. пересек. изнач. прямоуг. и все четыре прямоуг., обр. "полосу", полностью покрывают прямоуг., ибо пересечением "полос". Но т.к. каждый прямоуг. "задевает" этот прямоуг., ибо пересечением "полос", то этот прямоуг. пересек. все прямоуг.

Ч.т.д.

$1008 = 2^4 \cdot$

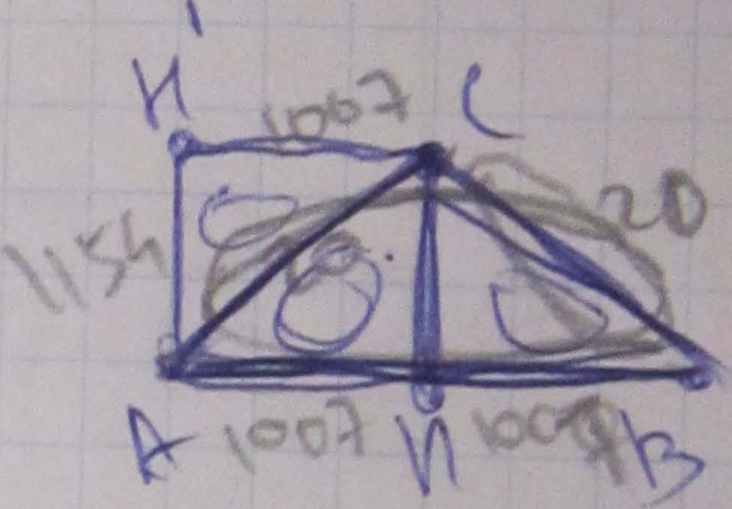
1 2 3 4 5
1 2 4 8 16 32



$1007 \cdot 1154 +$
$1007 + 100$

1008 | 2
504 | 2
252 | 2
126 | 2
63 | 3
21 | 3
7 | 7
1

$1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$



847 | 7
121 | 11
11 | 11
1

$847 = 7 \cdot 11^2$

$2541 = 3 \cdot 847 =$
$= 3 \cdot 7 \cdot 11^2$

$1533^2 - 1008^2 =$

$= (1533 - 1008)(1533 + 1008) =$

$= 525 \cdot 2541 =$

525 | 5
105 | 5
21 | 3
7 | 7
1

$= 5^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$

$= 15 \cdot 77 =$

$= 770 + 385$

2541 | 3
847 | 7
121 | 11
11 | 11
1

$1008 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$1008 = 2^5 \cdot 3 = 32 \cdot 3 = 30 + 18 = 48.$

$1008 = 2^5 \cdot 3 =$

$= 2^4 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48$

$1008 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7.$

55

$(k/2)! \cdot (k/4) = 2016 + k^2$

≥ 1

Kata.

$6^4 \cdot 1\,2\,4\,5\,7\,8$

A N.

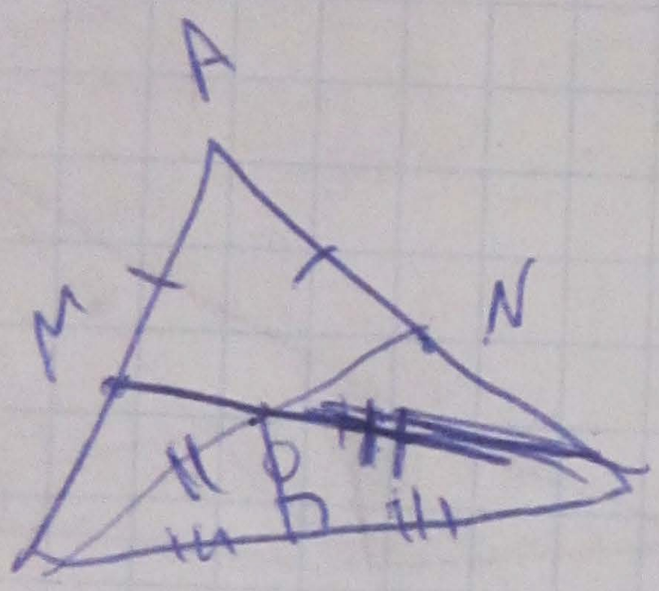
$6^4 \cdot \frac{1}{2^4}$

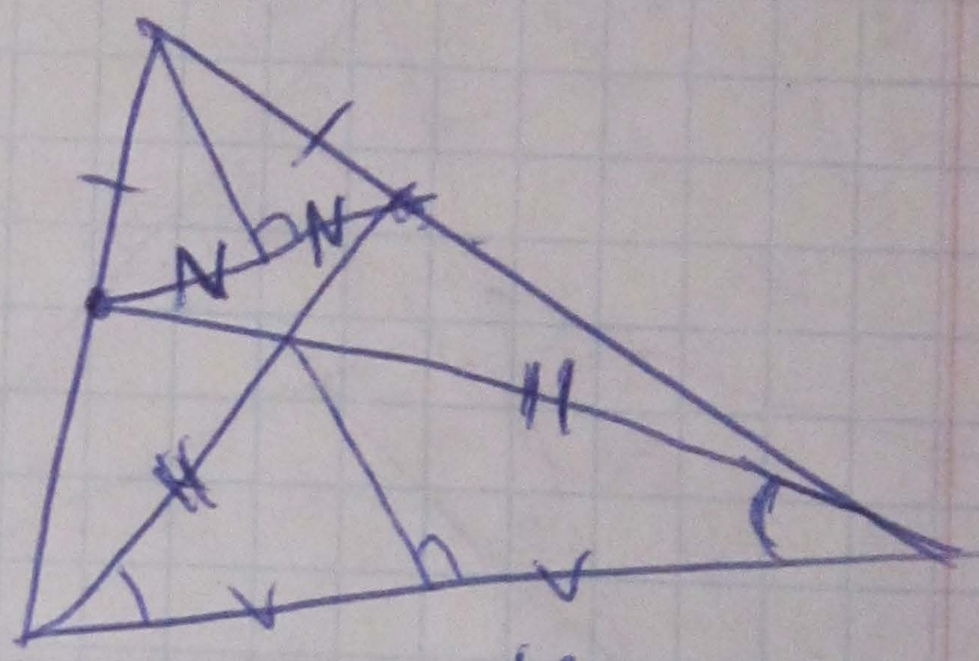
$7+7+15 = 14+15 = 29$

$\frac{k}{2} \geq 6.$

$6^4 \cdot 29.$

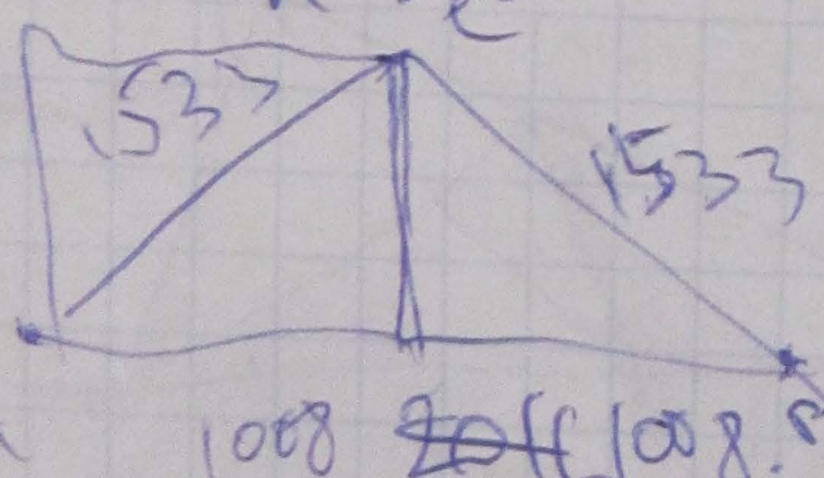
$k \geq 12.$





$a = \frac{k}{2}.$

$k \geq 25.$



$a! \cdot \frac{a}{2} = 2016 + 4a^2.$

$(a-1)! \cdot \frac{1}{2} = \frac{2016}{a^2} + 4.$

$a - 1 \geq 2.$

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

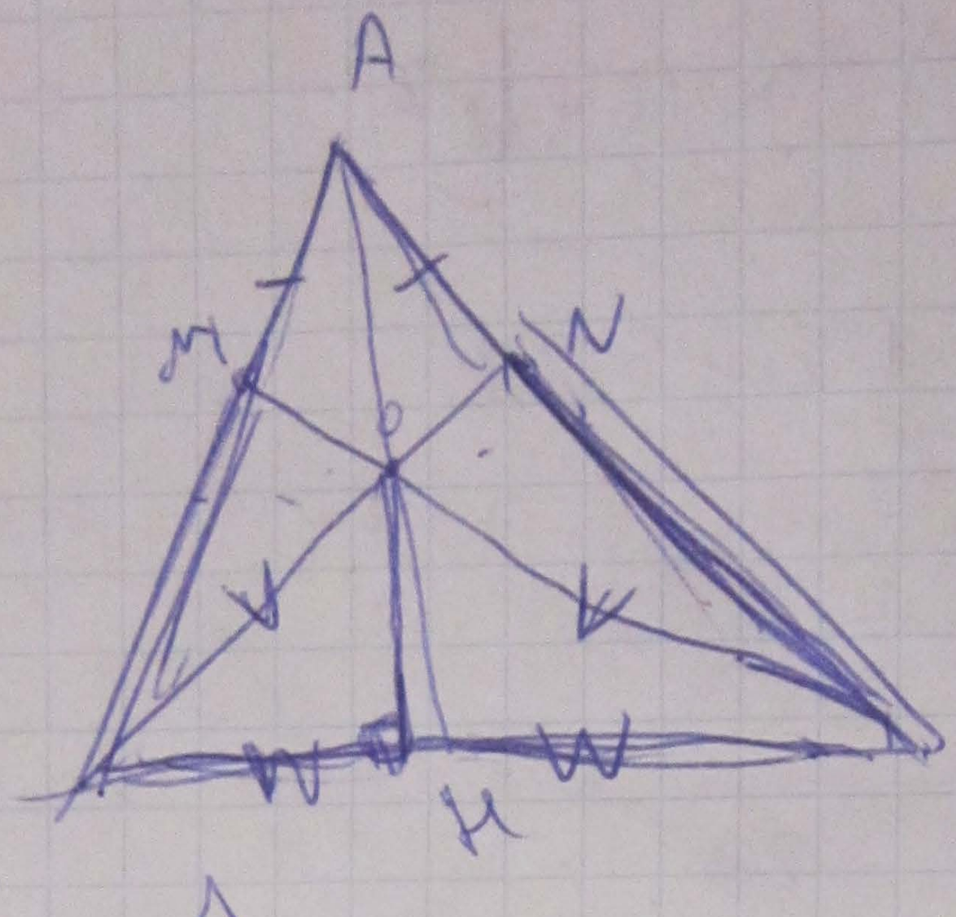
2016 | 2	63 | 3
1008 | 2	21 | 3
504 | 2	7 | 7
252 | 2	
126 | 2	

$2^2 \quad 2^6$

2^4

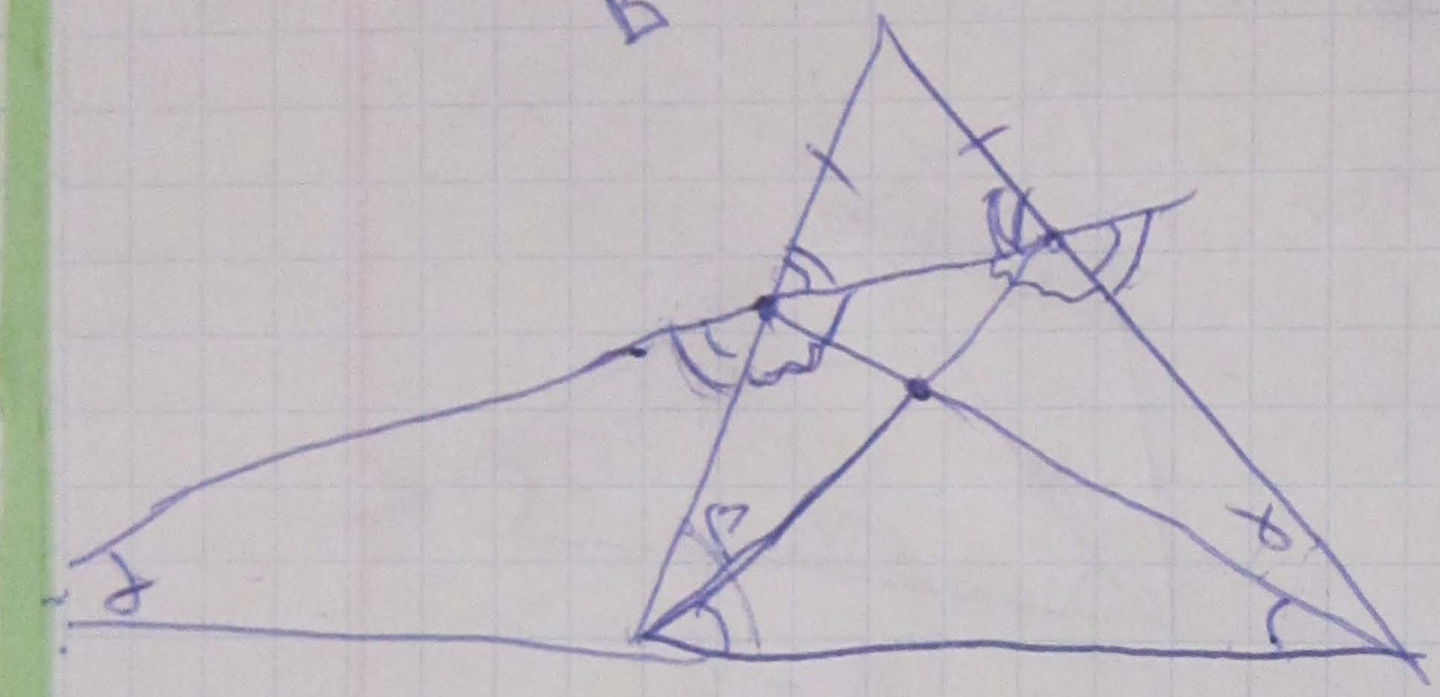
$3^2 \cdot 2^6 \quad 3^2 \cdot 2^2$

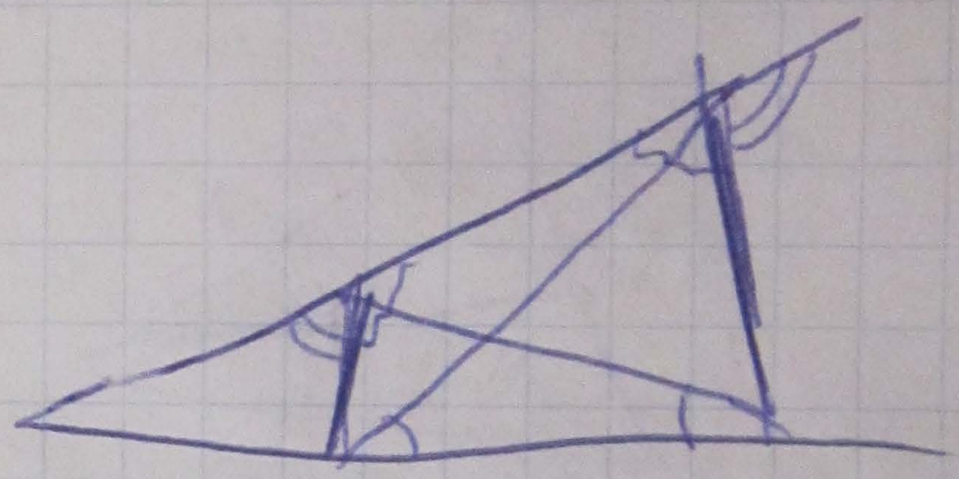
$3^2 \cdot 2^4 \quad 3^2$



$$\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AM}{BM}=\frac{BH}{HC}=2$$

$$\frac{CN}{BM}=\frac{HC}{BH}.$$

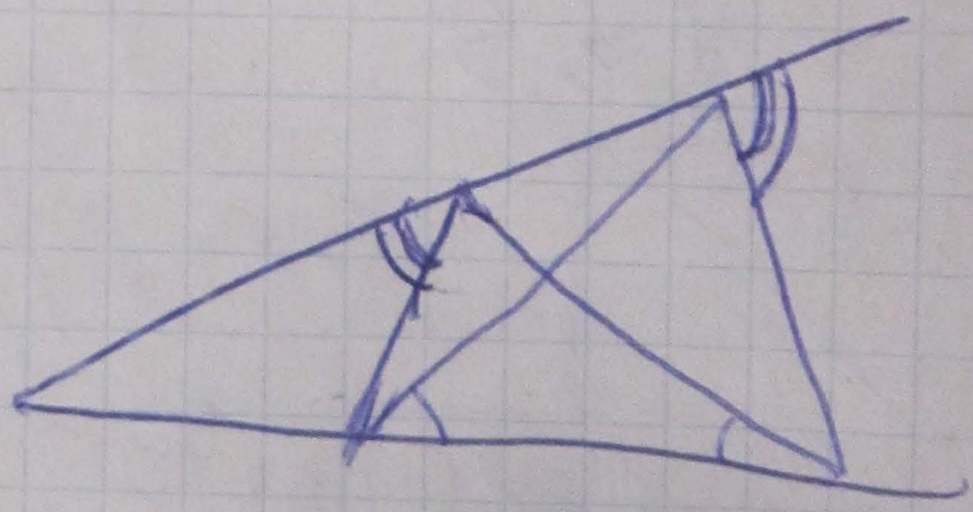




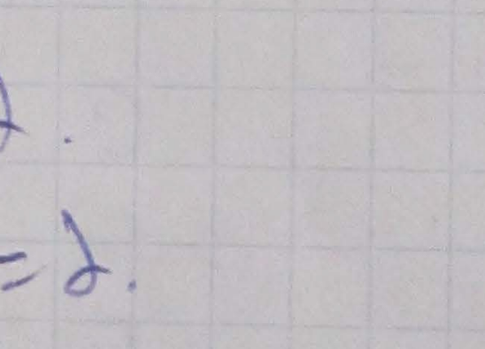
$$② - ① - \gamma = \alpha.$$

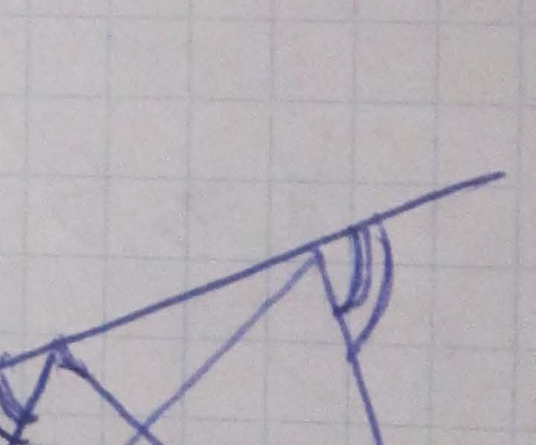
$$① + \beta - ② = \alpha.$$

$$\beta - \gamma = 2\alpha.$$



1008 1155.







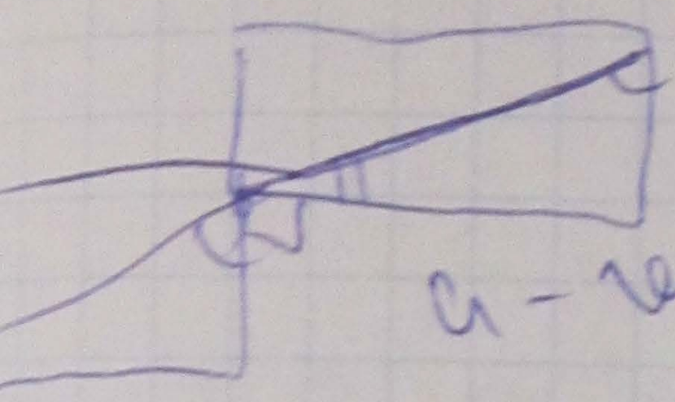
$a! : \frac{a}{2} = 2016 + 4a^2$.

$8! = \frac{2016 \cdot 2}{9} : 8$.

$(a-1)! \cdot \frac{1}{2} = 2016 / a^2 + 4$

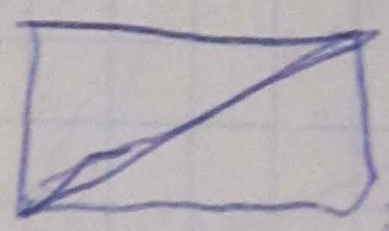
$(a-1)! = \frac{2016 \cdot 2}{a^2} + \underbrace{8}_{:8}$

$: 2^{2n} \cdot 2^{2n} \cdot 2^{2n} \cdot 2^{2n} : 2^7 + 8 : 8$.



$a - 1 \leq 4$.

$\left(\frac{k}{2}\right)! \cdot \frac{k}{4} \geq \left(\frac{k}{4}\right)! \cdot \frac{k}{4} =$



$a \leq 4$. $\left(\frac{k}{4}\right)^3 = \frac{k^3}{64}$ из

$2016 + k^2$.

3^2

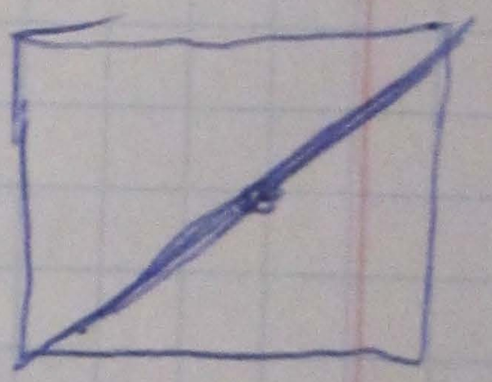
$2^2 \cdot 3^2$

$2^4 \cdot 3^2$

2^6

$a - 1 \leq 3 \cdot 64$ $\frac{2016}{k^2} + 1$.

$a \leq 4$.

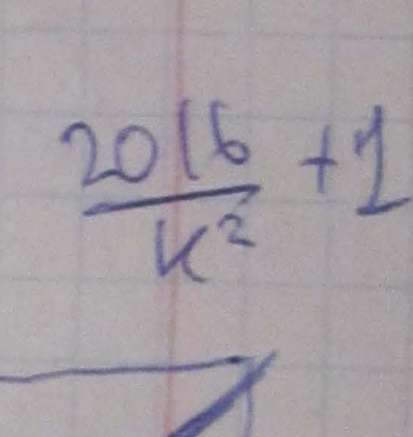


$7! = \frac{504}{5} + 1$

$2016 \mid 84$

1008

504

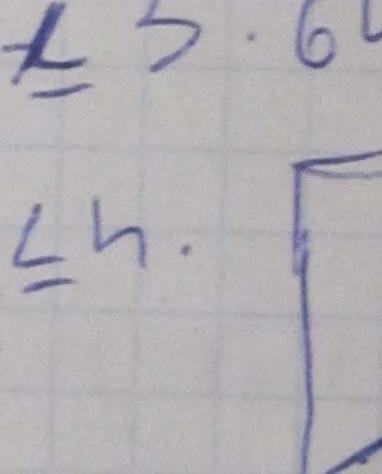


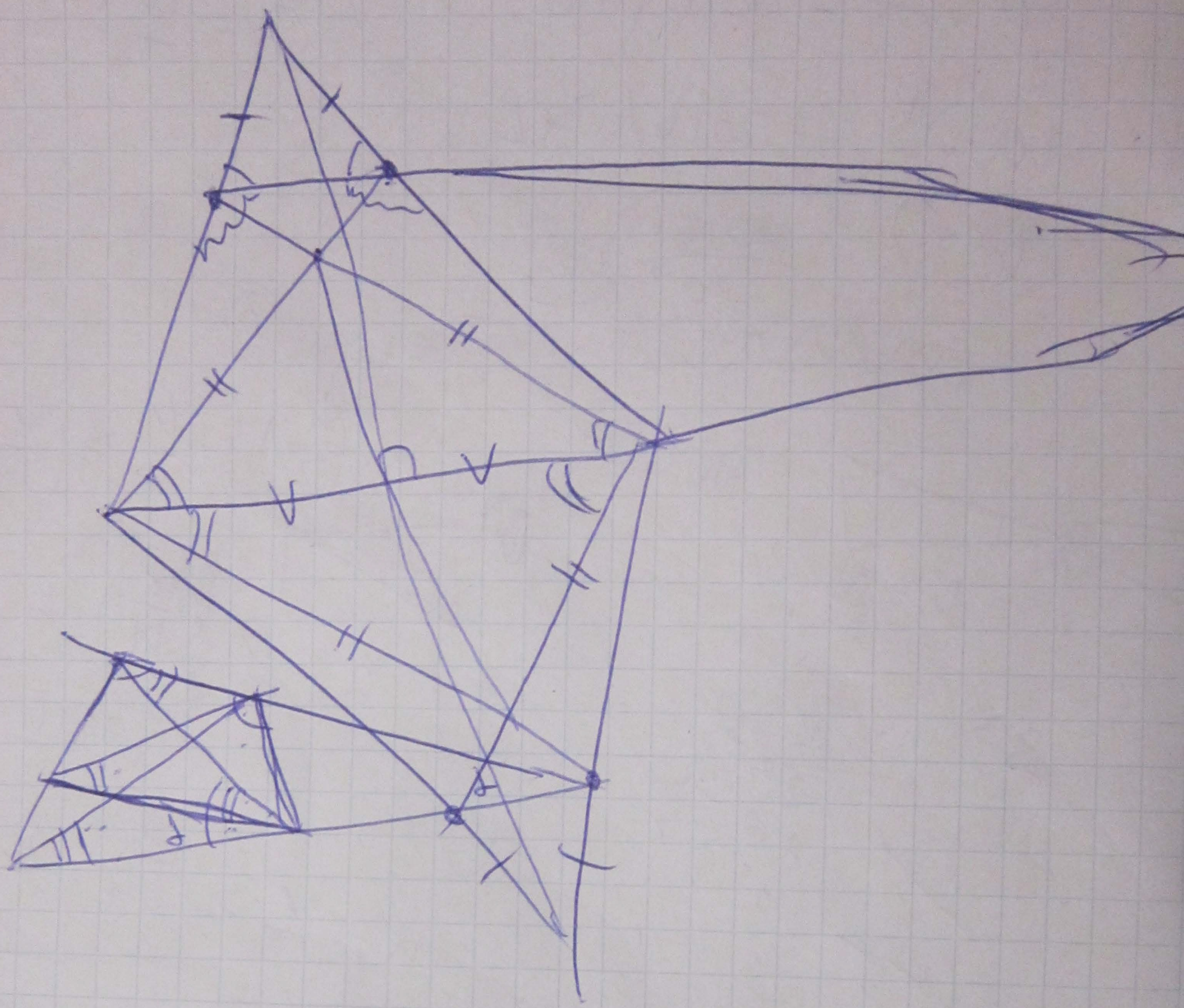
100 ст

90

n. x_1







$a! \cdot \frac{a}{2} = 2016 + 4a^2$

$(2b)! \cdot b = 2016 + 16b^2$ $\quad b = \frac{a}{2} = \frac{4}{4}$

$\Rightarrow 2 \cdot (2b-1)! = \frac{2016}{b^2} + 16$

$(2b-1)(2b)\cdot$

1 2 3 4 5 6 7

1 2 6 24 120 720 720·7.

$2b-1 \leq 6$

$2b \leq 7$

$b \leq 3,5.$

$3^2 \cdot 2^6$ $\quad 3 \cdot 2^3$

$3^2 \cdot 2^4$ $\quad 3 \cdot 2^2$

$3^2 \cdot 2^2$ $\quad (3 \cdot 2)$

3^2 $\quad (3)$

2^6 $\quad 2^3$

2^4 $\quad (2^2)$ ×

2^2 $\quad (2)$ ×

$1.$ $\quad (1)$ ×

$a-1 \leq 7.$

$a \leq 8.$

$a! \cdot a = 2016 \cdot 2 + 8a^2$ $\quad 2016 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$

$2^5 \cdot 7 = 32 \cdot 7 =$

$(a-1)! = \frac{2016 \cdot 2}{a^2} + 8$ $\quad 5! = \frac{2016 \cdot 2}{3^2 \cdot 2^2} + 8 \cdot$ $= 14 +$

$+ 210 =$

$= 224$

$3! = \frac{2016 \cdot 2}{16} + 8.$

$a! \cdot \frac{a}{2} = 2016 + a^2$

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

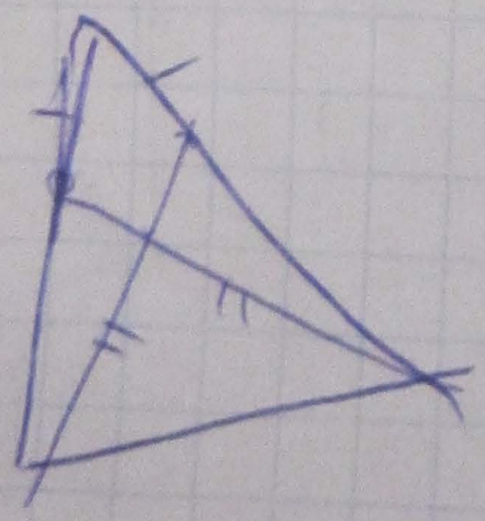
$(a-1)! \cdot \frac{1}{2} = \frac{2016}{a^2} + 4.$

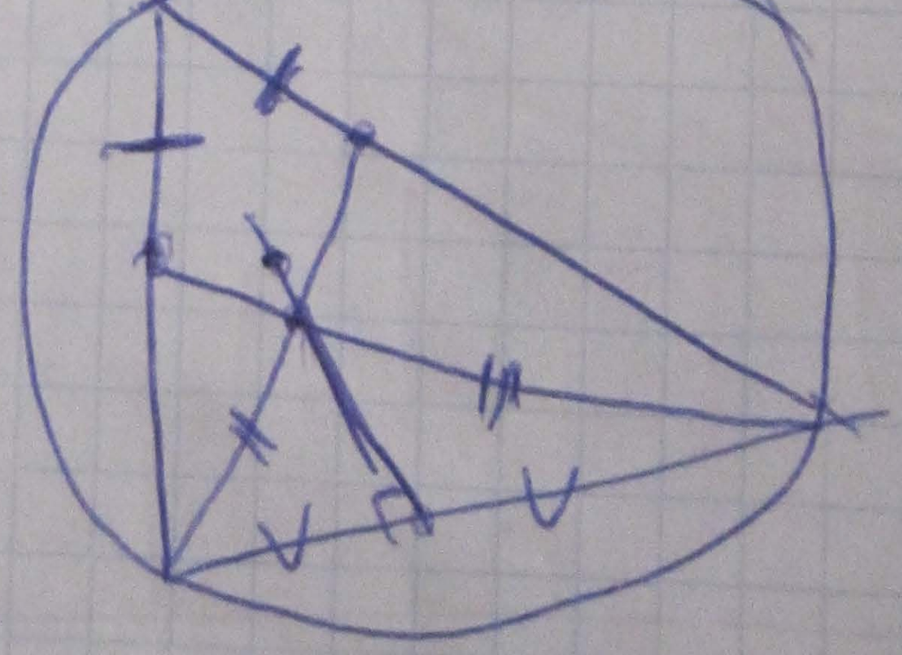
$(a-1)! = \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7}{a^2} + 8.$

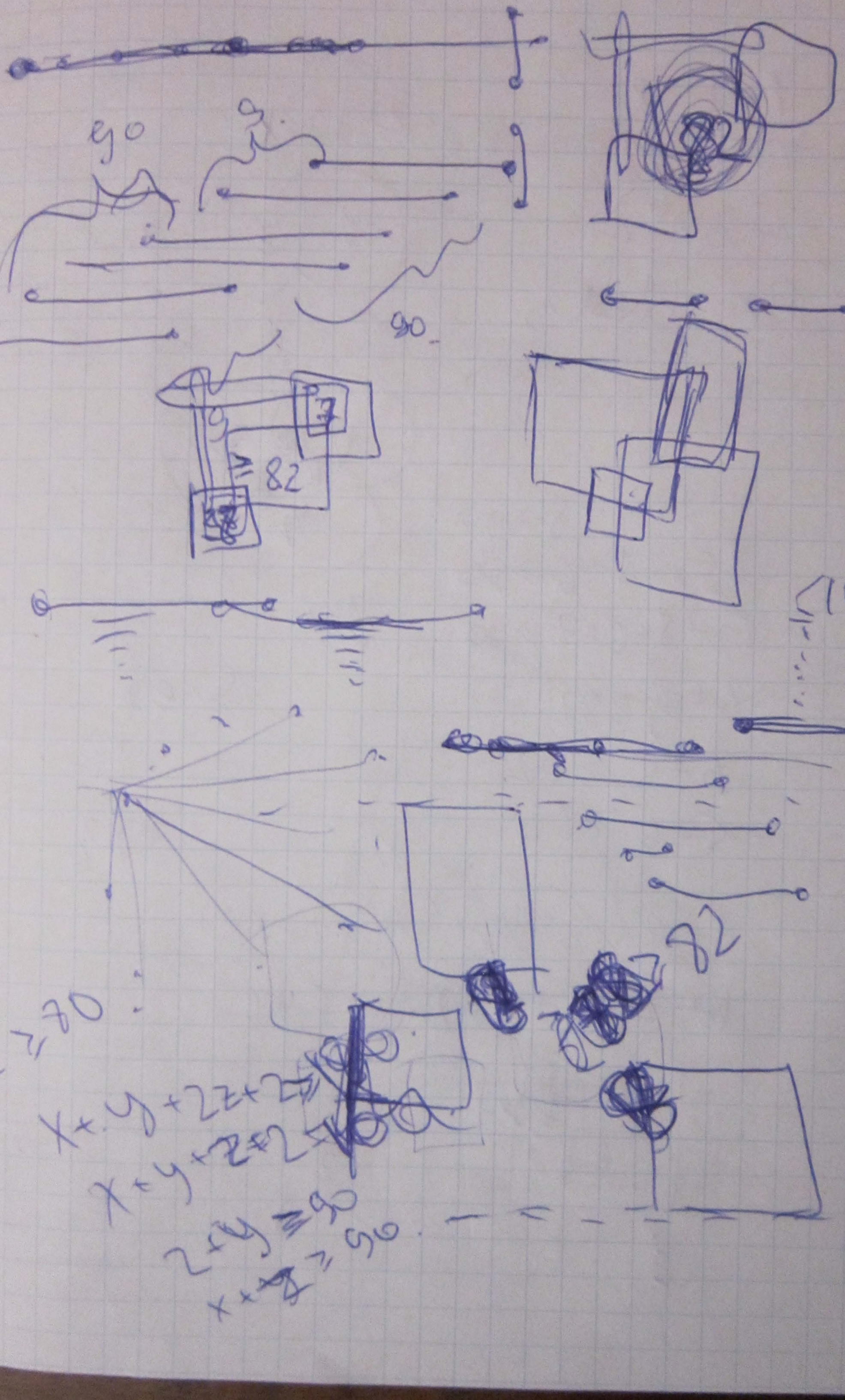
1	$0! = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 + 8$
2	$1! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 + 8$
2^2	$3! = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 + 8$
2^3	$7! = 3^2 \cdot 7 + 8 = 9 \cdot 7 + 8 = 63 + 8 = 71.$
3	$2! = 2^6 \cdot 7 + 8$
$3 \cdot 2$	$5! = 2^4 \cdot 7 + 8 = 16 \cdot 7 + 8 = 70 + 42 + 8 = 120$

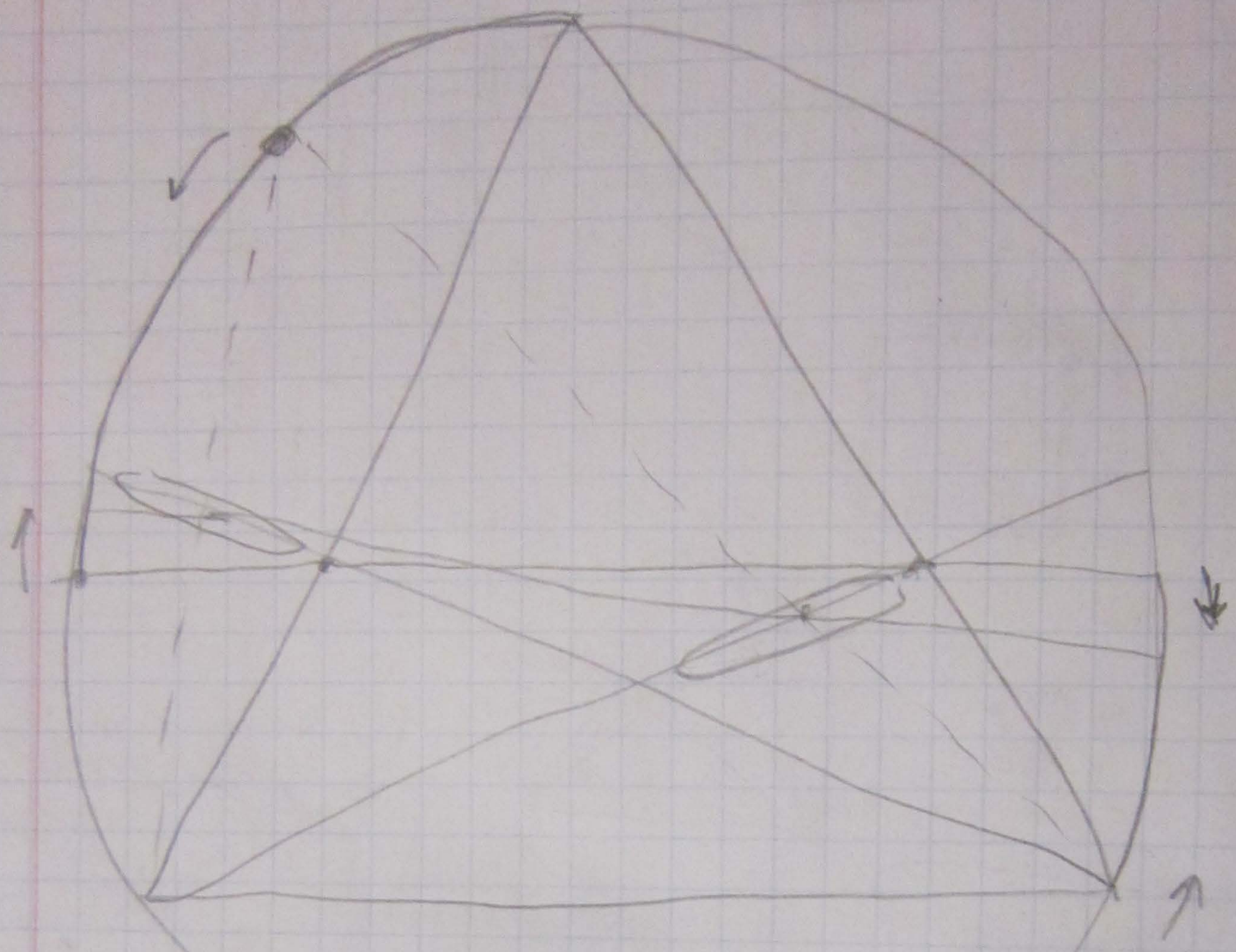
1
2^1
2^2
~~2^3~~
3
$3 \cdot 2$
$3 \cdot 2^2$
~~$3 \cdot 2^3$~~

$6! \cdot 3 = 2016 + 12^2$






90
82
≤10см.
270
82
x+y+2z+2≥
x+y+z≠2
2≠y≥90
x+z≥90



$2^n + n^{2016}$ - hyper

2016 | 2
1008 | 2
504 | 2
252 | 2
126 | 2
63 | 3
21 | 3
7 | 7
1

2: 1 0 0 0 0
1 2 1 2 1
1 2 0 0
1 2 4 3 1
1 2 4 2 4

$2^n + (n^{63})^{25}$

$2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$

$2^n \equiv 2 \pmod{n}$

Сначала
кошурд.

вставка

вставка

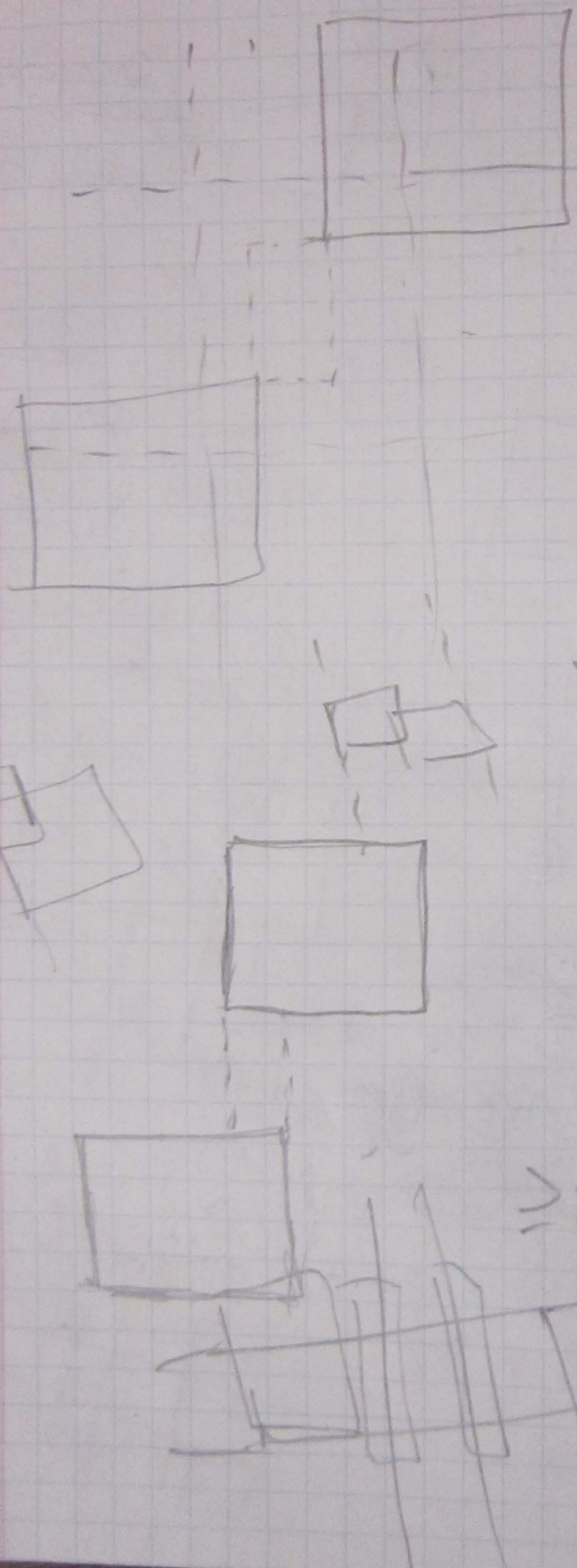
$$① + ⑫ \geq 90$$
$$② + ⑫ \geq 90$$
$$① + ② + ⑫ + ⑥ \geq 98$$
$$① + ② + ⑫ + ⑫ \geq 180$$
$$⑫ - ⑥ \geq 180 - 98 = 82$$
$$⑫ \geq 82$$

≥ 82

$\geq 82 - 18 = 64$

≤ 18

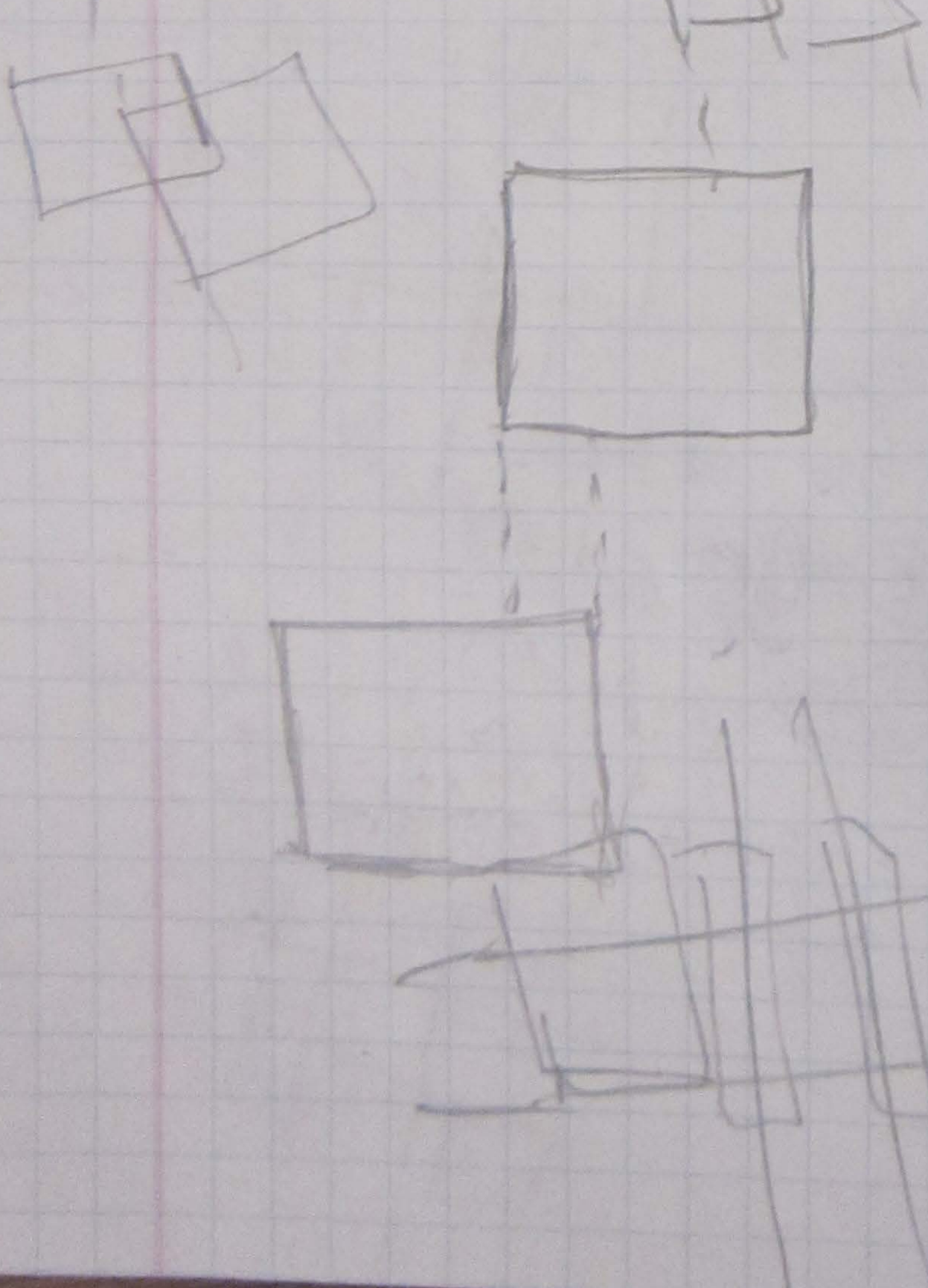
①



общ. ≥ 82

перек ≤ 16.

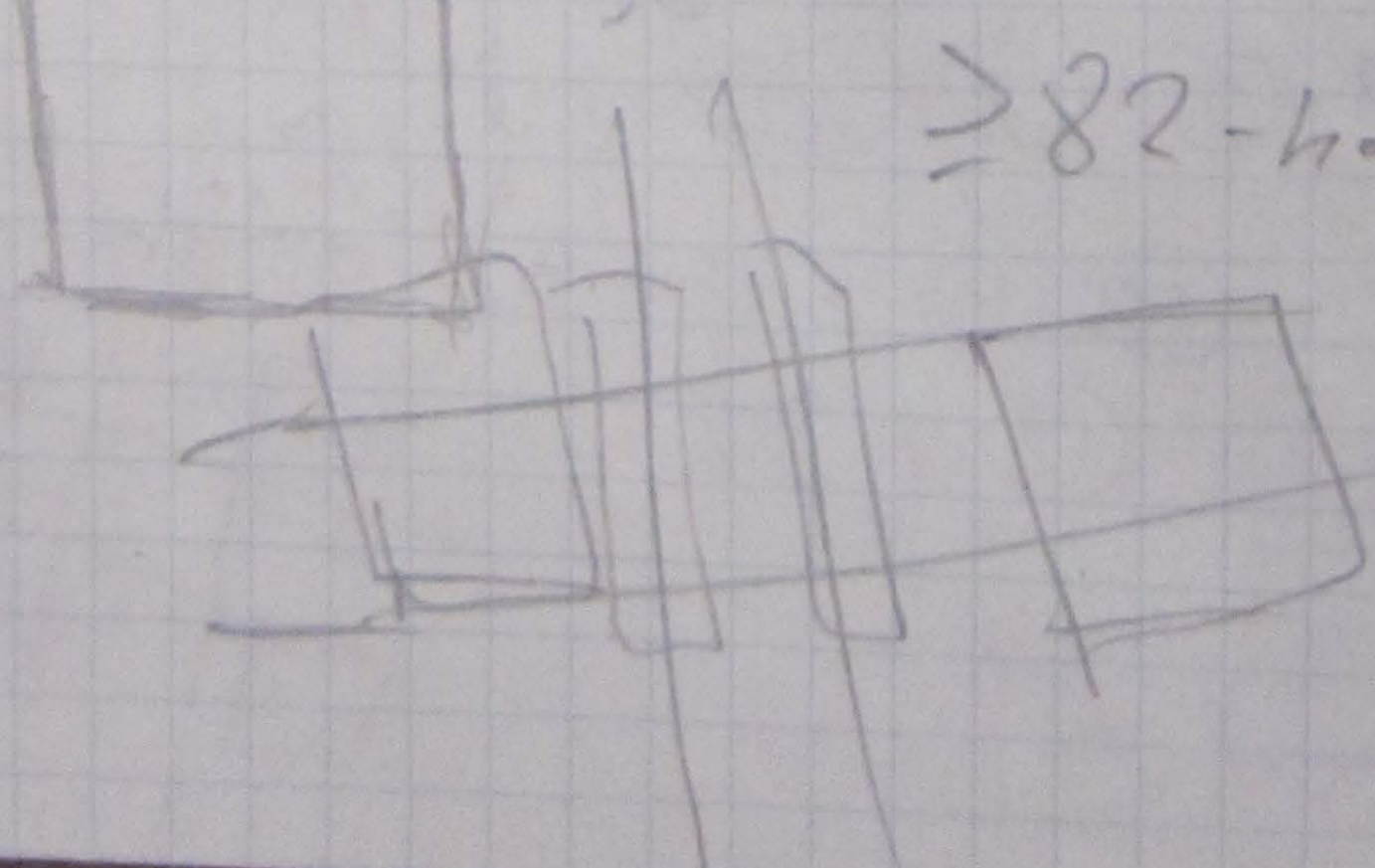
перек ≥ 82 - 17 = 65



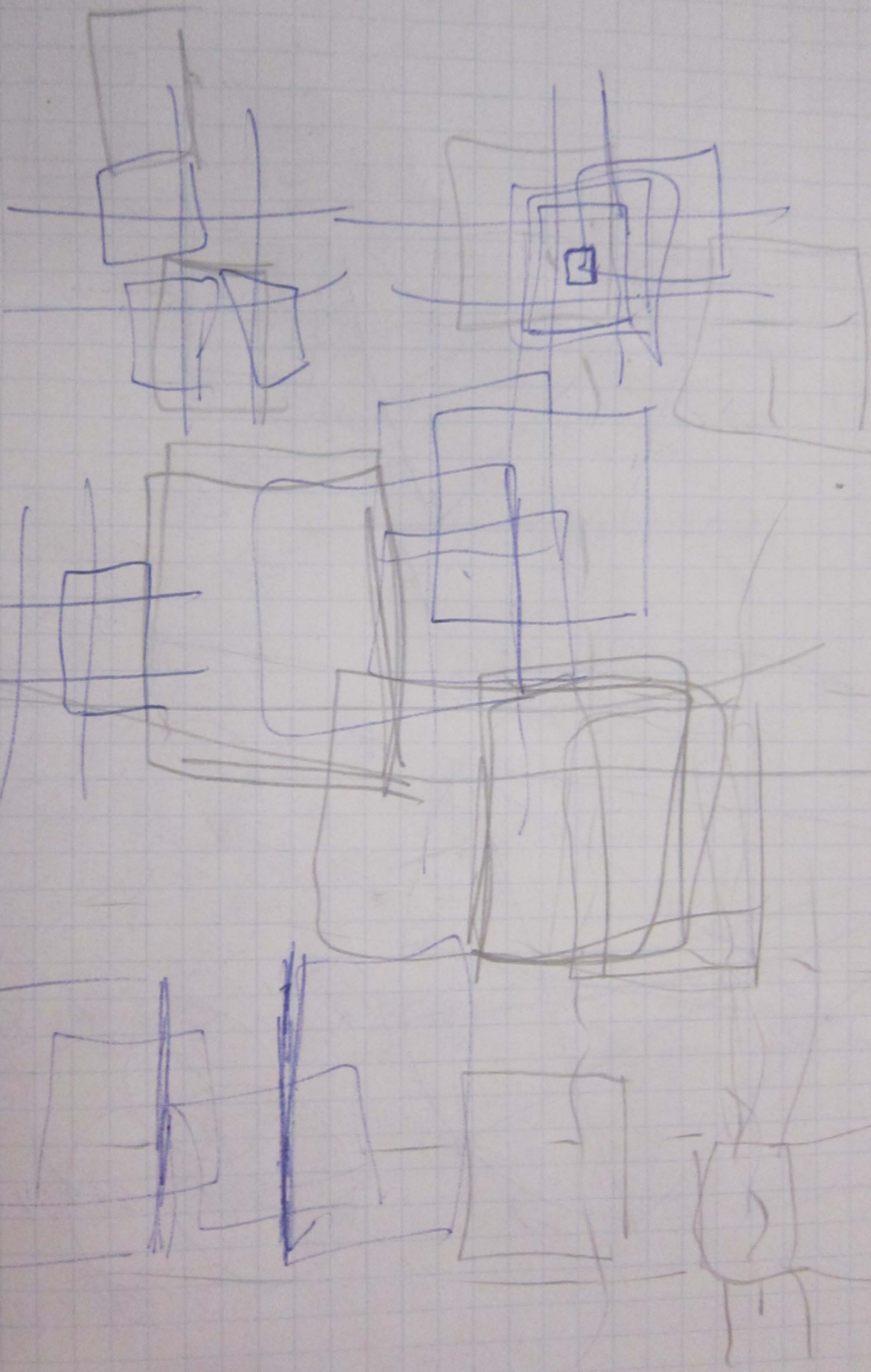
≥ 82 - 4 · 17 = 14.

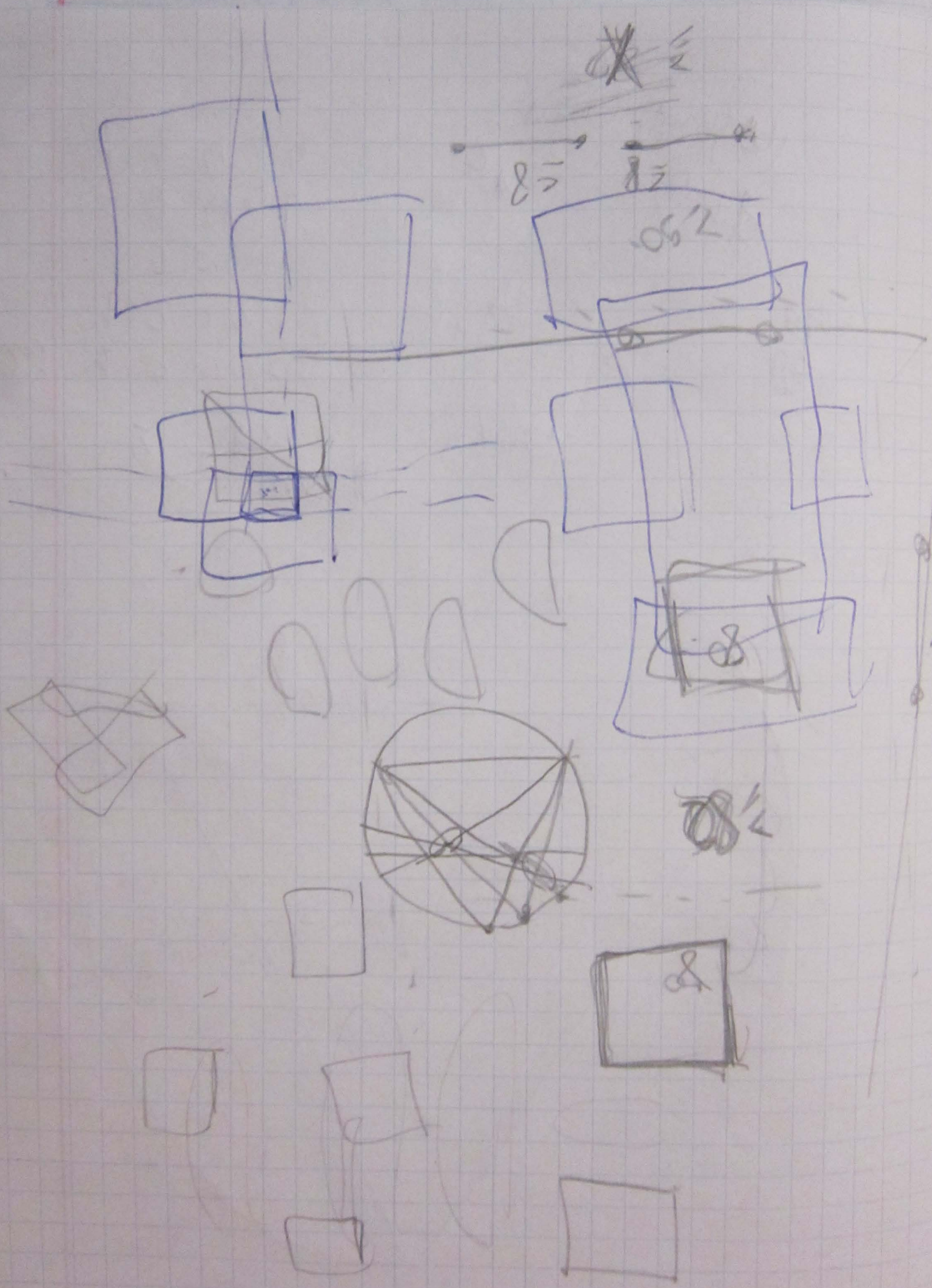
общ. ≥ 82

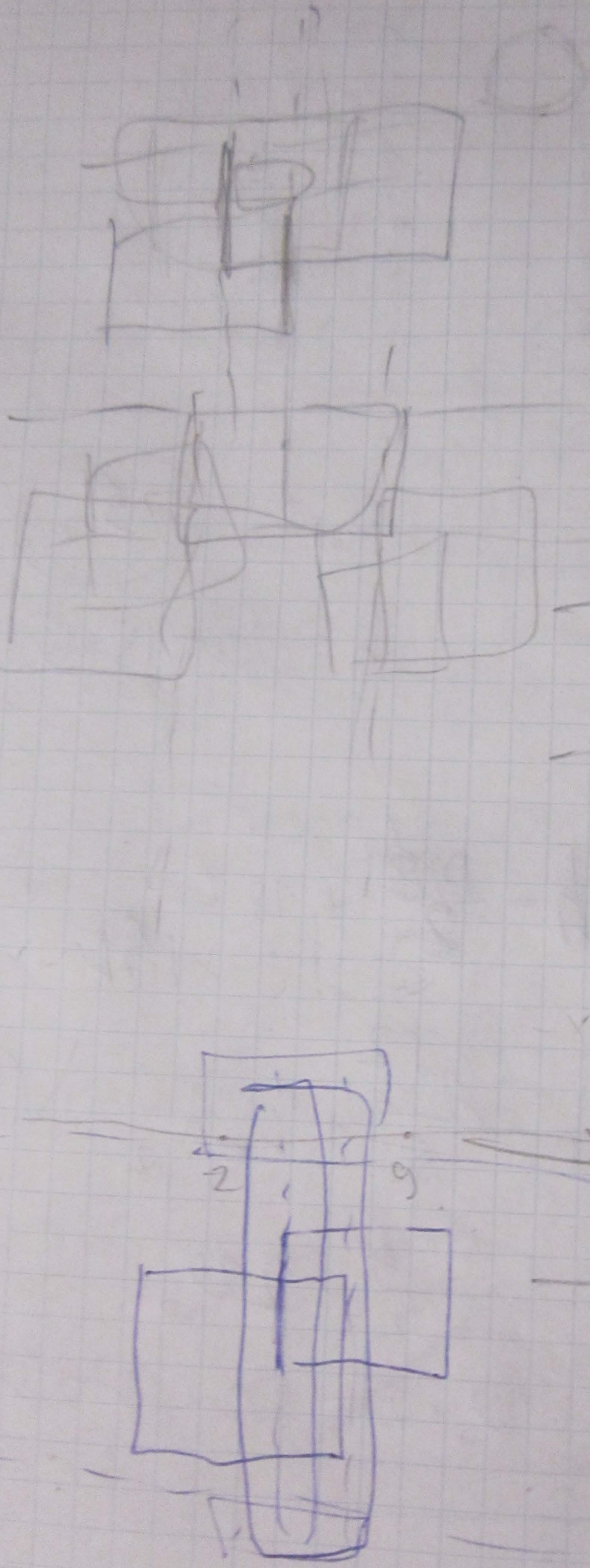
перек. ≤ 16.



≥ 82 - 4 · 18 = 10







3	1	2	0
	x		

