Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017-2018 учебный год
Решения задач заключительного этапа

8 класс

8.1. Так как длина дистанции $L = 6$ км, а средняя скорость бегуна на всей дистанции $v_{\text{ср}} = 18$ км/ч, то время T, за которое он пробежал эту дистанцию:

$$T = \frac{L}{v_{\text{ср}}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}\ \text{ч} = 20\ \text{мин}.$$

С другой стороны, первый километр он пробежал за 3 минуты, второй — за $3+t$, третий — за $3+2t$ и так далее, поэтому:

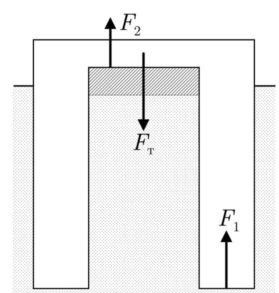
$$T = 3 + (3+t) + (3+2t) + (3+3t) + (3+4t) + (3+5t) = 18 + 15t\ \text{мин}.$$

Приравняв эти два равенства, находим искомое время t:

$$18 + 15t = 20 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{2}{15}\ \text{мин} = 8\ \text{сек}.$$

Ответ. $t = 8$ секунд.

8.2. Ледяной стакан находится в равновесии, значит сумма сил, действующих на него, равна нулю (см. рис.):



$$F_{\text{т}} = F_1 + F_2,$$

где $F_{\text{т}} = mg$ — сила тяжести, $F_2 = P_0 S_2$ — сила давления P_0 на дно стакана и $F_1 = P(S_2 - S_1)$ — сила давления на толстые стенки стакана. Таким образом:

$$mg = P_0 S_2 + P(S_1 - S_2). \tag{2.1}$$

Давление P_0 равно давлению столба масла в проколотом отверстии:

$$P_0 = \rho_{\text{м}} g h, \tag{2.2}$$

где h — искомая высота столбика масла в просверленном отверстии.
Давление P же формируется столбом масла в проколотом отверстии, а также слоями масла и воды уже внутри стакана, то есть:

$$P = \rho_{\text{м}} g(h + h_{\text{м}}) + \rho_{\text{в}} g h_{\text{в}}. \tag{2.3}$$

Заметим, что высота столба воды внутри стакана $h_{\text{в}}$ легко выражается через известные величины:

$$h_{\text{в}} = h_1 - h_2 - h_{\text{м}} = 44\ \text{см}.$$

Вернемся к уравнению (2.1), подставив в него выражения для давлений (2.2) и (2.3):

$$mg = \rho_{\text{м}} g h S_2 + (\rho_{\text{м}} g(h + h_{\text{м}}) + \rho_{\text{в}} g h_{\text{в}})(S_1 - S_2). \tag{2.4}$$

Масса стакана $m = \rho_{\text{л}} V$, а объем $V = S_2 h_2 + (S_1 - S_2) h_1$. Введем также новое обозначение: $S = S_2 = S_1 - S_2$, и подставим в (2.4):

$$S(h_2+h_1)\rho_{\text{л}}g = \rho_{\text{м}}hgS + (\rho_{\text{м}}(h+h_{\text{м}})+\rho_{\text{в}}h_{\text{в}})gS \quad\Leftrightarrow\quad (h_2+h_1)\rho_{\text{л}} = \rho_{\text{м}}h + \rho_{\text{м}}(h+h_{\text{м}})+\rho_{\text{в}}h_{\text{в}}.$$

Отсюда находим искомую величину h:

$$h = \frac{(h_2+h_1)\rho_{\text{л}} - \rho_{\text{в}}h_{\text{в}} - \rho_{\text{м}}h_{\text{м}}}{2\rho_{\text{м}}} = 4\text{ см}.$$

Ответ. Столбик масла в проколотом отверстии будет высотой $h = 4$ см.

8.3. Мощность нагревателя — это отношение количества теплоты, произведенного им, ко времени, за которое оно произведено:

$$N = \frac{Q}{t}.$$

При этом все выделенное тепло ушло на нагревание воды и находится по формуле:

$$Q = cm(T - T_0).$$

Отсюда мощность нагревателя:

$$N = \frac{cm(T-T_0)}{t}.$$

Подставляем числа из условий, и получаем:

$$N = \frac{4200\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 540\text{ кг}\cdot 20^\circ\text{C}}{1800\text{ сек}} = 25200\text{ Вт} = 25{,}2\text{ КВт}.$$

При сжигании $m = 1$ кг бытового газа выделяется количество тепла, равное

$$Q = qm = 31{,}5\text{ МДж}.$$

Зная мощность нагревателя, найдем, за какое время это тепло выделится:

$$t = \frac{Q}{N} = \frac{qm}{N} = \frac{31{,}5\text{ МДж}}{25{,}2\text{ КВт}} = \frac{31{,}5\cdot 10^6\text{ Дж}}{25{,}2\cdot 10^3\text{ Вт}} = 1250\text{ сек}.$$

Ответ. Мощность нагревателя $N = 25{,}2$ КВт; 1 кг газа он сожжет за $t = 1250$ сек.

8.4. То, что в первом опыте вольтметр показывает 0 В, означает, что напряжение на резисторе A равно напряжению на резисторе C, то есть:

$$I_{AB}R_A = I_{CD}R_C. \tag{4.1}$$

При этом по закону Ома мы знаем:

$$I_{AB} = \frac{U}{R_A+R_B}, \qquad I_{CD} = \frac{U}{R_C+R_D}.$$

Подставляя эти равенства в уравнение (4.1), получаем:

$$\frac{R_A}{R_A+R_B} = \frac{R_C}{R_C+R_D} \quad\Leftrightarrow\quad R_A(R_C+R_D) = R_C(R_A+R_B) \quad\Leftrightarrow\quad R_AR_D = R_BR_C.$$

Так как мы знаем, что нас набор состоит из сопротивлений в 1, 2, 4 и 8 Ом, то:

$$R_AR_D = R_BR_C = 8\text{ Ом}^2.$$

Рассмотрим все возможные значения сопротивлений, для каждого вычисляя напряжения на резисторах A и C по формулам

$$U_A = \frac{UR_A}{R_A + R_D}, \qquad U_C = \frac{UR_C}{R_C + R_B}$$

и проверяя из разность:

R_A (Ом)	R_B (Ом)	R_C (Ом)	R_D (Ом)	U_A (В)	U_C (В)	$\lvert U_A - U_C\rvert$ (В)	
8	2	4	1	8	6	2	✓
8	4	2	1	8	3	5	×
4	1	8	2	6	8	2	✓
4	8	1	2	6	1	5	×
2	1	8	4	3	8	5	×
2	8	1	4	3	1	2	✓
1	2	4	8	1	6	5	×
1	4	2	8	1	3	2	✓

Из этой таблицы видно, что каким бы не было сопротивление R_D, мы можем с помощью результатов двух опытов определить все остальные сопротивления.

8.5. Рассмотрим силы, действующие на груз в первом случае. Это:

1. Сила тяготения, направленная вниз: $F_{\text{т}} = mg$.
2. Сила упругости первой пружины. Будем считать эту силу положительной, если она направлена вверх, и отрицательной, если она направлена вниз. По закону Гука $F_1 = k_1(l_1 - h)$,где l_1 — расстояние от пола до края верхней пружины в невозмущенном состоянии.
3. Сила упругости второй пружины. Аналогично первой пружине: $F_2 = k_2(l_2 - h)$, где l_2 — расстояние от пола до края нижней пружины в невозмущенном состоянии.

Так как груз находится в равновесии, то сумма сил, действующих на него, должна равняться 0:

$$mg - k_1(l_1 - h) - k_2(l_2 - h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mg = k_1(l_1 - h) + k_2(l_2 - h). \tag{5.1}$$

Пусть после того, как тело погрузили в воду, его высота изменилась на Δh (считаем эту величину положительной в случае, если высота стала больше, и отрицательной — если меньше). С учетом этого:

$$mg - k_1(l_1 - h - \Delta h) - k_2(l_2 - h - \Delta h) - F_{\text{Арх}} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow mg - F_{\text{Арх}} = k_1(l_1 - h - \Delta h) + k_2(l_2 - h - \Delta h). \tag{5.2}$$

Вычтем уравнение (5.2) из уравнения (5.1):

$$F_{\text{Арх}} = k_1\Delta h + k_2\Delta h \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{F_{\text{Арх}}}{k_1 + k_2}.$$

Таким образом, для нахождения искомой величины Δh осталось найти силу Архимеда.

$$F_{\text{Арх}} = V\rho_{\text{в}}g = \frac{m}{\rho_{\text{г}}}\rho_{\text{в}}g = mg\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{г}}} = 20 \text{ Н}.$$

$$\Delta h = \frac{F_{\text{Арх}}}{k_1 + k_2} = 0{,}01 \text{ м} = 1 \text{ см}.$$

Ответ. Груз поднимется на 1 см.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017-2018 учебный год
Решения задач заключительного этапа

9 класс

9.1. Удобно отсчитывать время назад от момента полной остановки поезда. Если поезд тормозит с ускорением a, то за время t до остановки он пройдет путь $at^2/2$.
Пусть полное время торможения поезда T. Между моментом T и моментом $T - t_1$ (до остановки) мимо Васи прошел вагон, поэтому длина вагона:

$$L = \frac{aT^2}{2} - \frac{a(T - t_1)^2}{2}. \tag{1.1}$$

Между моментом $T - t_1$ и моментом $T - t_1 - t_2$ прошел еще вагон, поэтому:

$$L = \frac{a(T - t_1)^2}{2} - \frac{a(T - t_1 - t_2)^2}{2}. \tag{1.2}$$

Приравняв выражения (1.1) и (1.2), получим **ответ:** время остановки поезда T равно

$$T = \frac{t_2^2 - t_1^2 + 2t_1t_2}{2(t_2 - t_1)}.$$

9.2. Определим количество теплоты, которое выделяется при охлаждении и полной заморозке воды для изготовления одной ледышки:

$$Q = cmT_0 + \lambda m, \tag{2.1}$$

где m — масса воды, равная массе одной ледышки, T_0 — ее начальная температура, c — удельная теплоемкость воды и λ — удельная теплота плавления.
Согласно условию задачи, лишь часть этой тепловой энергии тратится пушкой на выбрасывание приготовленных ледышек. Что это означает? Чтобы ледышка покинула пушку, ей нужно сообщить некоторую скорость, поэтому в задаче речь идет о том, что часть тепловой энергии, получаемой при охлаждении и заморозке воды, превращается в *энергию движения* полученных ледышек. Это утверждение можно записать в виде

$$\eta Q = \frac{mv_0^2}{2}, \tag{2.2}$$

где η — доля тепловой энергии, которая переходит в кинетическую, v_0 — начальная скорость ледышек.
Как известно, движение любого тела в поле тяжести Земли можно рассматривать как сумму двух независимых движений: движения по горизонтали и по вертикали. Причем, поскольку в полете на ледышку не действуют никакие силы, кроме силы тяжести mg, то по вертикали она движется с ускорением g, а по горизонтали — с постоянной скоростью. Таким образом, для дальности полета имеем формулу

$$L = v_x\tau = v_0\tau\cos\alpha, \tag{2.3}$$

где $v_x = v_0\cos\alpha$ — проекция начальной скорости на ось x, α — угол, под которым стреляет пушка, τ — время полета ледышки.

Время полета ледышки можно найти, рассматривая движения ледышки по вертикали. В начальный момент времени вертикальная проекция скорости ледышки равнялась $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, а в наивысшей точке своей траектории — $v_y = 0$. Поэтому, время подъема на максимальную высоту равно

$$t = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{2.4}$$

Из симметрии также следует, что время подъема до максимальной высоты равно времени падения с этой высоты. Поэтому полное время полета ледышки составит $\tau = 2t$. Подставим полученные результаты в формулу (2.3), и используя формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{2.5}$$

Отсюда видим, что наибольшая дальность полета ледышки достигается при угле $45°$, так как $\sin 90° = 1$. Подставляя сюда скорость из (2.2) и численные значения физических величин (T_0 подставляем в Цельсиях), найдем

$$L_{\max} = \frac{2\eta Q}{mg} = \frac{2\eta}{g}(cT_0 + \lambda) = 4200 \text{ м}.$$

Ответ. Максимальная дальность полета составляет примерно 4 км.

Замечание. Пушка оказалась достаточно мощной!

9.3. В равновесии установившаяся температура постоянна, поэтому мощность теплоотдачи фургона P равна мощности его нагревателя. Понятно, что эта теплоотдача пропорциональна площади стенок фургона S. А так как температура окружающей среды $T_0 = 0°\text{C}$ и, по условию, $T \sim l$, где l — толщина стенок, то можно написать:

$$\Delta T \sim l \cdot \frac{P}{S}.$$

Коэффициент пропорциональности k здесь зависит от материала, и можно написать для каждого фургона:

$$T^* - T_0 = k_1 \cdot l_1 \cdot \frac{P}{S} = k_2 \cdot l_2 \cdot \frac{P}{S}, \tag{3.1}$$

где $T^* = 20°$ — (одинаковая) внутренняя установившаяся температура фургонов; l_1, l_2 — толщины их стенок; k_1, k_2 — коэффициенты для каждого материала стенок.
Для фургона с двойной стенкой пусть толщина каждого слоя вещества l, установившая внутренняя температура $T = 10°\text{C}$, а температура между стенками T_x, величина же P/S не изменилась (так как остались те же мощность нагревателя и площадь стенок). Тогда для каждого слоя пишем:

$$T - T_x = k_1 \cdot l \cdot \frac{P}{S}, \tag{3.2}$$

$$T_x - T_0 = k_2 \cdot l \cdot \frac{P}{S}. \tag{3.3}$$

Осталось решить полную систему уравнений (3.1), (3.2), (3.3).
Из системы (3.1) получим $k_1 \cdot l_1 = k_2 \cdot l_2$, и тогда из (3.2) и (3.3):

$$T - T_x = \frac{k_1}{k_2}(T_x - T_0) = \frac{l_2}{l_1}(T_x - T_0),$$

откуда

$$T_x = \frac{l_1 \cdot T + l_2 \cdot T_0}{l_1 + l_2}. \tag{3.4}$$

Из выражений (3.2) и (3.1) легко получить

$$\frac{l}{l_1} = \frac{T - T_x}{T^* - T_0},$$

и, используя (3.4), получаем

$$l = \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{T - T_0}{T^* - T_0} = \frac{l_1 \cdot l_2}{2(l_1 + l_2)},$$

и, окончательно, толщина двойной стенки фургона:

$$L = 2l = \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Ответ. Толщина стенок третьего фургона равна 1,5 см.

9.4. При неизменном угле раствора излучателя площадь, на которую распределяется излучение, растет как квадрат расстояния. Поэтому мощность на единицу площади (это называется интенсивность излучения) падает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поскольку сам объект, на который падает излучение, не изменился (в частности, не изменилась его площадь), то полная попадающая на него мощность падает с расстоянием так же, как и интенсивность падающего излучения, то есть обратно пропорционально квадрату расстояния.
Ответ на вопрос 1. Падающая на объект мощность уменьшится в $2^2 = 4$ раза.

Отраженная от заданного объекта мощность излучения составляет какую-то долю от падающей на него мощности. Эта доля определяется отражающими свойствами объекта, но пока сам объект остается тем же, она постоянна.
Из решения пункта 1 мы получили, что при удалении объекта **О** от источника **И** в 2 раза (например, с 10 км до 20 км) мощность, падающая на него, уменьшается в 4 раза (при неизменной мощности источника); значит, и отраженное от объекта **О** излучение уменьшится в 4 раза.
Однако расстояние от отражающего объекта до приемника **П** тоже возросло вдвое, и проводя рассуждения, как в пункте 1, мы получим, что мощность в приемнике упадет в 4 раза, если отраженная мощность от объекта **О** не изменилась. Однако эта мощность сама упала в 4 раза, значит, при неизменном источнике **И** мощность в приемнике **П** упала в $4^2 = 2^4 = 16$ раз. Мощность в приемнике отраженного сигнала при заданном источнике падает как 4-я степень расстояния!
Но у приемника той же чувствительности остается та же пороговая принимаемая мощность. Значит, чтобы ее сохранить, получаем **ответ на вопрос 2:** при увеличении максимального расстояния до отражающего объекта в 2 раза мощность излучения от источника надо увеличить в $2^4 = 16$ раз.

9.5. Пусть при отсутствии нагрева вода и ртуть устанавливаются так, что сопротивление участка между контактами равно R_0. При нагреве и смещении границы водного раствора вниз на x, сопротивление участка возрастет на

$$\frac{\rho x}{S} = \frac{\rho B(T - T_0)}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление раствора, а S — площадь трубки.
Итак, после нагрева будет:

$$R = R_0 + A(T - T_0). \tag{5.1}$$

(Поскольку B неизвестно, то и $A = \rho B/S$ — неизвестная константа.)
Когда температура при заданном напряжении перестает меняться, мощность, выделяющаяся на сопротивлении, равна мощности теплоотдачи. По условию, эта мощность пропорционально нагреву $T - T_0$. Итак:

$$\frac{U^2}{R} = k(T - T_0), \tag{5.2}$$

где k — коэффициент теплопередачи (еще одна константа). Теперь подставляем (5.1) в (5.2) для температур T_1, T_2, T_3 и напряжений U_1, U_2, U_3:

$$\frac{U_1^2}{R_0 + A(T_1 - T_0)} = k(T_1 - T_0), \tag{5.3}$$

$$\frac{U_2^2}{R_0 + A(T_2 - T_0)} = k(T_2 - T_0), \tag{5.4}$$

$$\frac{U_3^2}{R_0 + A(T_3 - T_0)} = k(T_3 - T_0). \tag{5.5}$$

Нам нужно найти U_3, и дальше это проблема арифметики. Однако система трех уравнений (5.3–5.5) содержит 4 неизвестных: R_0, A, k и U_3. Это значит, что мы *не можем* вычислить из условий задачи *все* эти неизвестные. Но, по счастью, напряжение мы найти можем.
Перепишем уравнения (5.3) и (5.4) так:

$$\frac{U_1^2}{T_1 - T_0} = kR_0 + kA(T_1 - T_0), \tag{5.3'}$$

$$\frac{U_2^2}{T_2 - T_0} = kR_0 + kA(T_2 - T_0), \tag{5.4'}$$

тогда из них легко найдем kR_0 и kA. А затем подставим эти выражения в вытекающее из (5.5) выражение:

$$U_3^2 = \frac{kR_0 + kA(T_3 - T_0)}{T_3 - T_0}. \tag{5.5'}$$

Если мы учтем, что $T_1 - T_0 = \Delta T$, $T_2 - T_0 = 2\Delta T$, $T_3 - T_0 = 3\Delta T$, и подставим это в (5.3') и (5.4'), легко получим

$$kA(\Delta T)^2 = \frac{U_2^2}{2} - U_1^2, \qquad kR_0\Delta T = 2U_1^2 - \frac{U_2^2}{2}.$$

Затем подставим это в (5.5'):

$$U_3^2 = 3kR_0\Delta T + 9kA(\Delta T)^2 = 3U_2^2 - 3U_1^2.$$

Вычисляя, находим **ответ:** $U_3 = 300$ В.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017-2018 учебный год
Решения задач заключительного этапа

10 класс

10.1. Вода не может закипеть, так как помимо того, что к ней подводится тепло от электроплитки, еще есть потери в окружающую среду. Эти потери тем больше, чем больше разность температур воды в кастрюле и окружающей среды. Сначала потери маленькие, меньше, чем мощность электроплитки, но по мере нагрева жидкости потери растут, пока не сравняются с мощностью, подводимой от электроплитки, вследствие чего наступает тепловой баланс: жидкость не нагревается и не охлаждается, а «застревает» именно на 98 градусах (согласно условиям задачи). Далее, кастрюлю быстро переставили на более мощную электроплитку. И так как она дает тепла больше, чем теряется в окружающую среду, вода на второй электроплитке закипает.
Теперь запишем все в виде формул. В случае первой плитки, когда мощность потерь сравнялась с мощностью, подводимой от электроплитки, мы можем записать

$$P_1 = P_{\text{потери}}, \tag{1.1}$$

где P_1 — мощность первой электроплитки, $P_{\text{потери}}$ — мощность потерь.
В случае второй электроплитки $P_2 > P_{\text{потери}}$, где P_2 — мощность второй электроплитки. Причем разность $P_2 - P_{\text{потери}}$ обеспечивает нагрев жидкости до температуры кипения. Учитывая равенство (1.1), и считая, что при нагреве от 98° до 100° мощность тепловых потерь меняется несущественно, получаем

$$P_2 - P_1 = \frac{cm\Delta T}{\tau}, \tag{1.2}$$

где $c = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{K}}$ — теплоемкость воды, $m = 1$ кг — масса воды в кастрюле, $\Delta T = 2^\circ$C — изменение температуры воды за время $\tau = 5$ секунд. Подставив все значения, получаем мощность второй электроплитки.
Ответ. Мощность второй электроплитки равна $P_2 = 1780$ Вт.

10.2. Поскольку частица с положительным зарядом пролетела вдвое большее расстояние, чем частица с отрицательным зарядом, то можно сделать вывод, что электрическое поле в конденсаторе направлено вверх. Поэтому оно будет «мешать» упасть частице с зарядом $+q$, и «помогать» упасть частице с зарядом $-q$. Поскольку как электрическая сила, так и сила тяжести, направлены по вертикали, то они никак не влияют на движение частиц по горизонтали. то есть вдоль оси x они движутся с одинаковыми и постоянными скоростями. Поэтому, расстояние, пройденное частицами, можно вычислить по формулам:

$$2L = v_0 t_+, \qquad L = v_0 t_-, \tag{2.1}$$

где v_0 — начальная скорость частиц, $t_\pm$ — их время движения в конденсаторе ($\pm$ указывает на знак заряда рассматриваемой частицы).
Разделив первое уравнение на второе, получим: $t_+ = 2t_-$. Получился вполне ясный результат: положительно заряженная частица падала дольше, и поэтому прошла большее расстояние.
Теперь рассмотрим движение частиц по вертикали. Изначально они обе находились на одной и той же высоте $d/2$, где d — расстояние между пластинами, однако, они падали с разными ускорениями:

$$a_+ = g - \frac{qE}{m}, \qquad a_- = g + \frac{qE}{m}, \tag{2.2}$$

которые легко получаются из II-го закона Ньютона. Стоит заметить, что $g > |q|E/m$, так как иначе положительная частица точно не прилипла бы к нижней пластине.
Поскольку начальная скорость частиц была направлена по горизонтали, то имеем

$$\frac{d}{2} = \frac{a_+ t_+^2}{2}, \qquad \frac{d}{2} = \frac{a_- t_-^2}{2}. \tag{2.3}$$

Разделив первое уравнение на второе, найдем, что $a_- = 4a_+$. Подставляя сюда формулы для ускорений (2.2), найдем величину электрического поля в конденсаторе.
Ответ. $E = 3mg/5q$.

10.3. Как известно, скорость испарения некоторого объема жидкости пропорциональна площади его свободной поверхности. Это означает, что скорость изменения массы шарообразной капли пропорциональная квадрату ее радиуса, то есть

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \sim r^2$$

и поскольку сама масса пропорциональна r^3, то время испарения капли будет пропорционально ее исходному радиусу: $t_0 \sim r_0$.
Ответ на вопрос 1. Если исходный размер капли сделать равным $2r_0$, то время испарения увеличится в 2 раза и будет равным $2t_0$.

Будем считать, что в каждый момент времени сила тяжести, действующая на каплю, уравновешивается силой сопротивления со стороны воздуха. Тогда имеем

$$mg = kvr \quad \rightarrow \quad v \sim r^2, \tag{3.1}$$

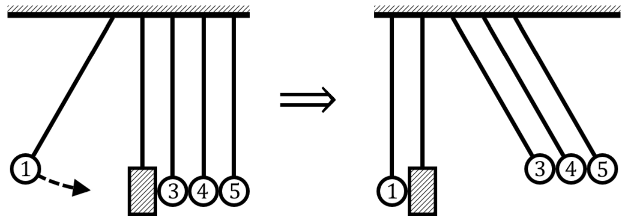
поскольку масса пропорциональна r^3, и все остальные величины, кроме скорости и радиуса, являются константами. Из формулы (3.1) видно, что скорость частицы меняется по мере падения (однако, согласно условиям задачи, это изменение медленное, поэтому мы не пишем слагаемое с ускорением).
Также из этой формулы следует, что средняя скорость пропорциональна квадрату исходного радиуса, то есть $v_{\text{ср}} \sim r_0^2$, тогда расстояние, пройденное каплей

$$h_0 = v_{\text{ср}} t_0 \sim r_0^3. \tag{3.2}$$

Ответ на вопрос 2. Если исходный радиус капли увеличить в 2 раза, то пройденное расстояние увеличится в 8 раз.

10.4. Используя законы сохранения энергии и импульса, можно показать, что при упругом соударении двух одинаковых шариков они обмениваются импульсами. Поэтому в первом случае, когда нет резиновой прокладки, первый шарик полностью передает свой импульс второму шарику и останавливается (меняется с ним импульсом), затем второй шарик передает весь свой импульс третьему и т.д., в результате импульс получает пятый шарик. так как ему уже некому передать свой импульс, он приходит в движение.
Рассмотрим теперь ситуацию, когда второй шарик заменен резиновой прокладкой. Резина, в данном случае, замедляет передачу импульса от первого шарика к третьему. Теперь передаваемый импульс *нарастает плавно*, в течение времени много большего, чем время передачи импульса непосредственно между самими шариками. Пока третий шарик не оторвался от резиновой прокладки, он плавно получает от нее *нарастающий* импульс, при этом быстро передавая то, что уже получил, четвертому шарику, который затем все передает пятому. В результате последующего обмена импульсами все три шарика будут приобретать импульсы до тех пор, пока третий шарик не оторвется от резиновой прокладки. Таким образом, все три шарика отклонятся от положения равновесия, причем они будут двигаться приблизительно как единое целое.

Ответ. Все шарики справа от прокладки отклонятся от положения равновесия:



Замечание. Мы рекомендуем Вам самим проверить это на эксперименте (в качестве резиновой прокладки можно использовать ластик). Успех опыта зависит от соотношения скоростей распространения сигнала (скоростей звука) в резиновой прокладке и шариках, которые, в свою очередь, зависят от жесткости материалов (модуля Юнга). Чем мягче резиновая прокладка, и чем жестче шарики, тем нагляднее получится эксперимент.

10.5. В результате того, что сосуд и поршень теплоизолированы, то кислород не может получить или отдать тепло внешней среде. Поэтому, согласно первому началу термодинамики, вся работа, совершенная внешними силами, идет на увеличение внутренней энергии газа. Изменение внутренней энергии вычисляется по известной формуле

$$\Delta U = \frac{5}{2}\nu R\Delta T, \tag{5.1}$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$ — разность конечной и начальной температур газа, и вследствие того, что кислород — это двухатомный газ, вместо привычных «3/2» в формуле стоит коэффициент «5/2». Тогда имеем

$$-p_{\text{атм}}\Delta V - \frac{mg}{S}\Delta V = \frac{5}{2}\nu R\Delta T. \tag{5.2}$$

где $\Delta V = V_2 - V_1$ — изменение объема газа. В левой части равенства стоит работа внешних сил (атмосферное давление и вес грузика), и знак минус появился вследствие того, что происходит сжатие $V_2 < V_1$. Однако, мы не можем отсюда найти конечную температуру газа T_2, так как нам неизвестны V_1, V_2 и T_1. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для исходного и конечного состояний газа:

$$p_1V_1 = \nu RT_1, \tag{5.3}$$

$$\left(p_{\text{атм}} + \frac{mg}{S}\right)V_2 = \nu RT_2, \tag{5.4}$$

где давление в конечном состоянии вычислялось с помощью условия механического равновесия:

$$p_2 = p_{\text{атм}} + \frac{mg}{S}, \tag{5.5}$$

здесь $p_{\text{атм}}$ — атмосферное давление, m — масса грузика, S — площадь поршня, массой которого мы пренебрегаем.

Выразив объемы V_1 и V_2 из (5.3–5.4) и подставив их в уравнение (5.2), получим

$$\frac{1}{p_1}\left(p_{\text{атм}} + \frac{mg}{S}\right)T_1 - T_2 = \frac{5}{2}(T_2 - T_1). \tag{5.6}$$

Отсюда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{7} + \frac{2\left(p_{\text{атм}} + \frac{mg}{S}\right)}{7p_1} = \frac{5}{7} + \frac{2\cdot 2\cdot 10^5}{7\cdot 3\cdot 10^4} \approx 2{,}6. \tag{5.7}$$

Ответ. Температура (в Кельвинах) увеличилась примерно в 2,6 раза. Если принять, что исходная температура равна комнатной, то есть $T_1 \approx 300°$K, то получим, что $T_2 \approx 780°$K.

Замечание. Отметим также то, что при решении данной задачи нельзя пользоваться формулой $pV^\gamma = \text{const}$ (где γ — показатель адиабаты). Этой формулой можно пользоваться лишь тогда, когда рассматриваемый процесс *квазистатичен*. В данной задаче это эквивалентно тому, как если бы на поршень поставили груз, масса которого бы медленно росла со временем, причем так, что находящийся внутри газ последовательно проходил через состояния равновесия.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017-2018 учебный год
Решения задач заключительного этапа

11 класс

11.1. Запишем условия равновесия кубика в соленой воде. На него действуют две силы: сила тяжести и сила Архимеда. Однако, с силой Архимеда все не так просто, поскольку плотность соленой воды меняется с глубиной. Она теперь определяется через среднюю плотность жидкости $\rho_{\text{ср}}$:

$$F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{ср}} g a^3, \tag{1.1}$$

где $\rho_{\text{ср}}$ вычисляется по формуле

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\rho(H) + \rho(H+a)}{2} = \rho_0 + \frac{b(2H+a)}{2}. \tag{1.2}$$

Тогда из условия равновесия находим массу кубика

$$m = \rho_{\text{ср}} a^3 = \left(\rho_0 + \frac{b(2H+a)}{2}\right) a^3 = 1{,}4 \text{ кг}. \tag{1.3}$$

Ответ на вопрос 1. Масса кубика равна 1,4 кг.

Чтобы определить период колебаний кубика, нужно вывести его из положения равновесия — например, погрузить его еще глубже на величину z. Тогда сила Архимеда станет равной

$$F_{\text{Арх}} = \frac{\rho(H+z) + \rho(H+a+z)}{2} g a^3 = mg + bga^3 z \tag{1.4}$$

(здесь мы также использовали (1.3)). Видим, что появилось линейное по z слагаемое.
Уравнение движения кубика:

$$mw = mg - F_{\text{Арх}} = -bga^3 z, \tag{1.5}$$

где w — ускорение кубика. То, что получилось в правой части — это нескомпенсированная сила, стремящаяся вернуть кубик в положение равновесия. Проводя аналогию с силой упругости, можем заключить, что bga^3 — это эффективная жесткость системы $k_{\text{эфф}}$. Тогда период колебаний кубика

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\text{эфф}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\rho_0 + b(2H+a)}{2bg}} \approx 3{,}33 \text{ с}. \tag{1.6}$$

Ответ на вопрос 2. Период малых вертикальных колебаний кубика равен 3,33 секунды.

11.2. Найдем соотношение между периодами обращения планет с помощью третьего закона Кеплера:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3, \tag{2.1}$$

где индекс «1» относится к ближней планете, а индекс «2» — к дальней; a_1 и a_2 — длины больших полуосей орбит. Но так как орбиты являются окружностями, то большие полуоси совпадают с радиусами орбит r_1 и r_2.

Тогда, период обращения дальней планеты вокруг звезды равен

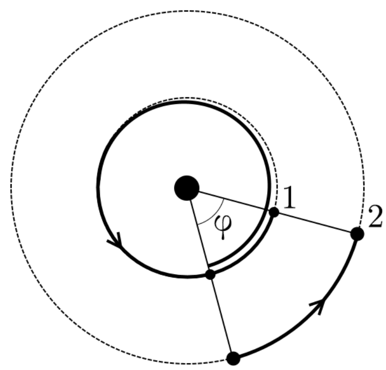
$$T_2 = T_1 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{3/2} T_1 = 8T_1. \tag{2.2}$$

Ответ на вопрос 1. Год на дальней планете длится в 8 раз дольше, чем на ближней.

Используя этот результат, мы также можем узнать соотношение между скоростями планет:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\pi r_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{2\pi r_2} = 2. \tag{2.3}$$

Пусть в начальный момент времени астрономы с дальней планеты зафиксировали прохождение ближней планеты по диску звезды. Через время T они снова зафиксируют это событие. При этом, если дальняя планета прошла путь φr_2, то ближняя пройдет $2\pi r_1 + \varphi r_1$ (см. рисунок).



Поскольку планеты движутся с постоянными скоростями, то

$$2\pi r_1 + \varphi r_1 = v_1 T, \qquad \varphi r_2 = v_2 T. \tag{2.4}$$

Подставив сюда $r_1 = r$ и $r_2 = 4r$, а также используя (2.3), найдем, что $\varphi = 2\pi/7$. То есть между наблюдениями прохождения ближней планеты по диску звезды дальняя планета совершает 1/7 оборота. Следовательно, полный оборот она сделает за время $T_2 = 7T$. И, наконец, используя (2.2), мы получаем $T_1 = 7T/8$.

Массу звезды определим из второго закона Ньютона, записанного, например, для ближней планеты. Имеем

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = G\frac{m_1 M}{r_1^2}, \tag{2.5}$$

где M — масса звезды. Скорость планеты выразим через период обращения

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = \frac{16\pi r}{7T}, \tag{2.6}$$

и подставим в уравнение движения.

Ответ на вопрос 2. Масса звезды

$$M = \left(\frac{16\pi}{7}\right)^2 \frac{r^3}{GT^2}.$$

.

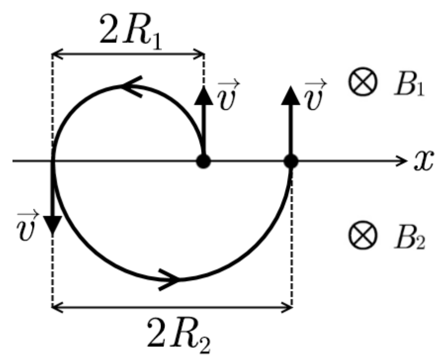
11.3. Известно, что на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца. Эта сила меняет направление вектора скорости частицы, но не меняет его модуль, вследствие чего частица движется по окружности (если нет скорости вдоль поля). Радиус этой окружности определяется как

$$R = \frac{mv}{qB}, \tag{3.1}$$

и направление движения вдоль этой окружности определяется по правилу левой руки. Время полного оборота (период вращения) частицы по этой окружности можно вычислить по формуле

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим движение частицы в области с магнитным полем B_1. По мере того, как частица движется в этой области, сила Лоренца меняет направление ее движения, заставляя двигаться влево по дуге окружности с радиусом R_1, до тех пор, пока частица снова не вернется к линии раздела магнитных полей. Но при этом она сместилась влево на расстояние $2R_1$ вдоль оси x. Далее частица начинает движение в области с магнитным полем B_2, сонаправленным с B_1. Модуль начальной скорости у нее такой же, как и в первой области, так как сила Лоренца не совершает работы. Сила Лоренца снова меняет направление движения частицы, заставляя ее двигаться по дуге окружности вправо, пока она не вернется до линии раздела полей, при этом пройдя расстояние $2R_2$ вправо вдоль оси x. Но так как $R_1 \neq R_2$, то частица не вернется в начальную точку, а сместится либо вправо, если $B_1 > B_2$, либо влево, если $B_1 < B_2$. Затем, начиная движение снова в области с полем B_1 картина будет повторяться.



Для простоты предположим, что $B_1 > B_2$. Чтобы найти среднюю скорость смещения вдоль оси x, разделим весь путь, пройденный частицей вдоль этой оси, на время ее движения. Очевидно, можно рассмотреть лишь один «цикл», то есть когда частица лишь один раз побывает в областях 1 и 2. При этом смещение вдоль x будет равно $2(R_2 - R_1)$, а время движения будет складываться из двух полупериодов вращения частицы в полях B_1 и B_2, то есть

$$v_{\text{ср}} = \frac{2(R_2 - R_1)}{\frac{T_1+T_2}{2}} = \frac{4(R_2 - R_1)}{T_1 + T_2} = \frac{2v}{\pi}\frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2}. \tag{3.3}$$

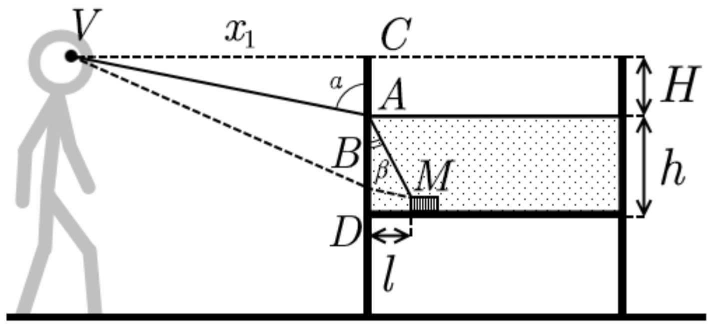
Проанализируем полученную формулу. Видно, что если $B_1 \gg B_2$, то $v_{\text{ср}} \to 2v/\pi$ и не зависит от величины магнитного поля. Если же $B_1 = B_2$, то никакого смещения вдоль оси x не будет: частица будет вращаться вокруг одной и той же точки. Если B_1 по величине близко к B_2, то средняя скорость будет очень маленькой. Если $B_1 < B_2$, то в формуле (3.3) нужно поменять местами индексы «1» и «2».

Ответ. В общем виде можно записать

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v}{\pi}\frac{|B_1 - B_2|}{B_1 + B_2}. \tag{3.4}$$

.

11.4. То, что Вася видит 2 монетки, связано с тем, что лучи от монеты M могут попасть в Васин глаз V двумя путями: MAV (преломление через верхнюю поверхность жидкости) и MBV (преломление через боковую поверхность). В положении наибольшего удаления x_1, когда это возможно, точка A оказывается на краю сосуда:



По закону преломления

$$\sin\alpha = n\sin\beta. \tag{4.1}$$

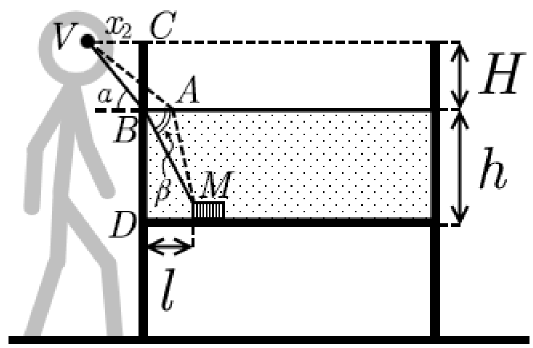
Рассмотрев ΔACV и ΔAMD, получим

$$\sin\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+H^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}}, \tag{4.2}$$

откуда

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+H^2}} = \frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{nHl}{\sqrt{h^2-l^2(n^2-1)}} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \approx 0{,}85 \text{ м}.$$

В ближайшем возможном положении x_2 точка B попала в верхнее возможное положение



Формула (4.1) снова верна, но теперь

$$\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{x_2^2+H^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}}, \tag{4.3}$$

откуда

$$\frac{H}{\sqrt{x_2^2+H^2}} = \frac{nh}{\sqrt{l^2+h^2}} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{H}{nh}\sqrt{l^2-h^2(n^2-1)} = \frac{3\sqrt{2}}{40} \approx 0{,}11 \text{ м}.$$

Ответ на вопросы 1 и 2. На расстоянии в пределах $x_2 \leqslant x \leqslant x_1$, то есть от 11 до 85 см, Вася видит 2 изображения.

По данным задачи несложно вычислить, что $\sin\beta = 1/\sqrt{2}$ (причем и в (4.2), и в (4.3)). Поэтому, если $n = 1{,}5$, то из соотношения (4.1) $\sin\alpha > 1$, что невозможно ни при каких углах α. Значит, крайние положения точек преломления A и B не достигаются, и Вася *всегда* видит 2 изображения. **Ответ на вопрос 3.** При коэффициенте преломления $n = 1{,}5$ Вася на любом расстоянии видит 2 изображения.

11.5. Процесс медленный, поэтому в каждый момент сохраняется равновесие, то есть уравнены силы на поршень ($P_1 = P_2$) и выполнены уравнения состояния для обеих частей сосуда:

$P_1V_1 = \nu RT_1$, $P_2V_2 = \nu RT_2$. Так как $V_1 + V_2 = V$, получаем:

$$V_1 = \frac{T_1}{T_1 + T_2}V, \tag{5.1}$$

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1 + T_2}V, \tag{5.2}$$

$$P_1 = P_2 = \frac{\nu R(T_1 + T_2)}{V}. \tag{5.3}$$

В начальный момент времени

$$V_{1_0} = V_{2_0} = \frac{V}{2}, \qquad P_{1_0} = P_{2_0} = \frac{2\nu RT}{V}. \tag{5.4}$$

Заметим, что, как целое, над системой работа не совершается (одна часть системы совершает работу над другой), поэтому все тепло идет на изменение внутренней энергии системы:

$$Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T) + \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T),$$

откуда

$$T_1 + T_2 = \frac{2Q}{3\nu R} + 2T. \tag{5.5}$$

Наконец, сам процесс в том сосуде, куда напрямую не подводится тепло, адиабатический:

$$P_1V_1^\gamma = P_{1_0}V_{1_0}^\gamma, \quad \text{где } \gamma = \frac{5}{3},$$

откуда

$$V_1 = \left(\frac{P_{1_0}}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_{1_0},$$

и, подставляя из (5.3), (5.4), (5.5), получим **ответ на вопрос 1**:

$$V_1 = \left(\frac{\frac{\nu R}{V}\left(2T + \frac{2Q}{3\nu R}\right)}{\frac{2\nu RT}{V}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{V}{2} = \left(1 + \frac{Q}{3\nu RT}\right)^{-\frac{3}{5}} \cdot \frac{V}{2},$$

$$V_2 = V - V_1 = V \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{Q}{3\nu RT}\right)^{-\frac{3}{5}}\right).$$

Используя (5.1), (5.2), (5.5), можем получить и **ответ на вопрос 2**:

$$T_1 = \frac{V_1}{V}(T_1 + T_2) = T \cdot \left(1 + \frac{Q}{3\nu RT}\right)^{\frac{2}{5}},$$

$$T_2 = \frac{V_2}{V}(T_1 + T_2) = T \cdot \left(1 + \frac{Q}{3\nu RT}\right) \cdot \left(2 - \left(1 + \frac{Q}{3\nu RT}\right)^{-\frac{3}{5}}\right).$$