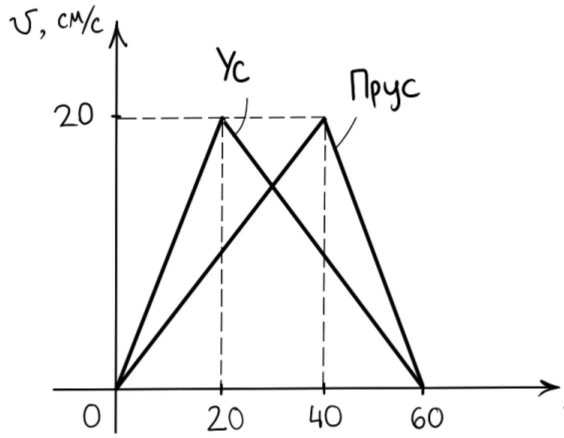
Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017-2018 учебный год
Решения задач отборочного этапа

9 класс

9.1. Два таракана Ус и Прус разминались перед забегом, бегая по одной дорожке. Они попросили третьего таракана Труса понаблюдать за ними и нарисовать график скоростей их движения от времени. Тараканы стартовали одновременно и из одной точки.

1. В какой момент времени t расстояние между Усом и Прусом было наибольшим?
2. И чему равнялось это расстояние L?



Правильный ответ: $t = 30$ сек, $L = 150$ см.

Решение. Из графика видно, что в первые 30 секунд забега скорость Уса была больше, чем у Пруса, то есть Ус был настолько быстр, что постоянно увеличивал дистанцию между ним и Прусом. В момент времени $t = 30$ сек, их скорости сравнялись, и далее скорость Уса стала меньше, чем у Пруса. Иными словами, Прус начал догонять Уса и уменьшать дистанцию между ними. Исходя из этого наблюдения заключаем, что наибольшее расстояние между Усом и Прусом приходилось на момент времени $t = 30$ сек.

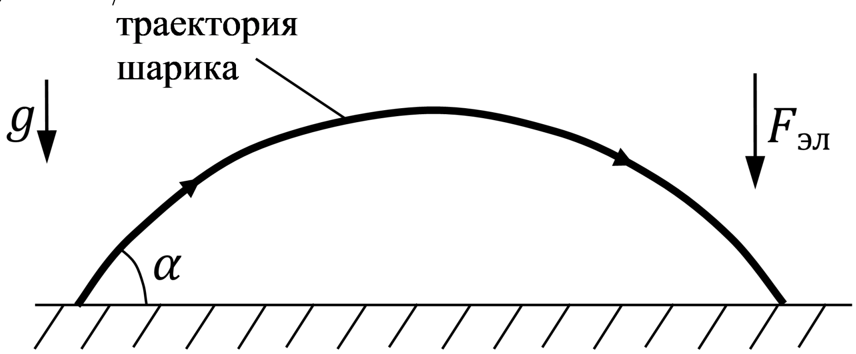
Чтобы посчитать максимальное расстояние между ними, мы должны из пути, которое пробежал Ус за 30 секунд вычесть путь, который пробежал Прус за то же время. Это можно сделать с помощью формул равноускоренного движения, но будет проще просто посчитать площадь под графиками $V(t)$ тараканов к моменту времени $t = 30$ сек. Учитывая еще, что их скорости в этот момент равны $V = 15$ см/с, находим площади:

$$S_1 = \frac{20 \cdot 20}{2} + \frac{20 + 15}{2} \cdot 10 = 375 \text{ см}, \quad S_2 = \frac{15 \cdot 30}{2} = 225 \text{ см}.$$

Их разность равна

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 150 \text{ см}.$$

9.2. Пружинный пистолет стреляет незаряженным шариком массой $m = 6{,}5$ г под углом $\alpha = 45°$ к горизонту так, что шарик всегда пролетает одинаковое расстояние. Шарик зарядили положительным зарядом. Известно, что возникшая со стороны электрического поля Земли сила направлена вниз и равна 130 мН. Найдите отношение расстояния, которое пролетал незаряженный шарик, к расстоянию, которое пролетит заряженный шарик. Считайте, что $g = 10$ м/с^2.



Правильный ответ: $\frac{L_{\text{не заряж}}}{L_{\text{заряж}}} = 3$.

Решение. На заряженный шарик действует бо́льшая притягивающая к Земле сила, чем на не заряженный. Поэтому, заряженный шарик пролетит меньшее расстояние.

Рассмотрим движение не заряженного шарика в поле силы тяжести. Это движение можно рассматривать как сумму двух независимых движений: по вертикали, и по горизонтали. Поскольку сила тяжести действует только в вертикальном направлении, то движение в этом направлении будет сопровождаться изменением скорости. А именно, при движении вверх, вертикальная проекция скорости будет уменьшаться, а при движении вниз — увеличиваться. Горизонтальная проекция скорости будет постоянной, поскольку на шарик не действуют никакие силы в горизонтальном направлении.

Исходя из этого, мы можем записать, что расстояние на которое улетел шарик вычисляется по формуле
$$L = vt\cos\alpha,$$
где $v\cos\alpha$ — горизонтальная проекция скорости, t — время полета шарика.

Чтобы посчитать время полета шарика, необходимо рассмотреть его движение по вертикали. Из симметрии видно, что время, затрачиваемое при движении вверх равно времени движения шарика вниз. Каждое из этих времен вычисляется по формуле
$$t_{\text{вверх}} = t_{\text{вниз}} = \frac{t}{2} = \frac{v\sin\alpha}{g},$$
где $v\sin\alpha$ — вертикальная проекция скорости.

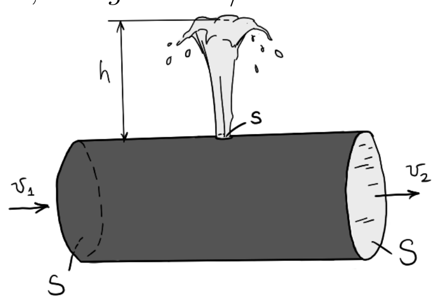
Записав силы, действующие на заряженный шарик, можно придти к выводу, что все сводится к формальной замене $g \to g' = g + F/m$, тогда
$$\frac{L_{\text{не заряж}}}{L_{\text{заряж}}} = \frac{g'}{g} = 1 + \frac{F}{mg} = 3.$$

9.3. Гарри Поттер подошел к электрометру, стрелка которого показывала 6 делений. Гарри зарядил свою эбонитовую палочку, потерев ее о мех, и коснулся электрометра. После этого стрелка стала показывать уже 2 деления. Теперь, снова точно так же зарядив свою палочку, Гарри касается электрометра во второй раз. Какой наибольший заряд может показать электрометр? Деление, показываемое стрелкой, пропорционально общей величине заряда на электрометре, причем знак заряда прибор не различает. Считайте, что при соприкосновении весь заряд палочки переходит на электрометр. Гарри заряжает палочку электрическим зарядом (не каким-нибудь магическим!).

Правильный ответ: Электрометр может показать 10 делений.

Решение. Изначально стрелка электрометра показывала 6 делений. И поскольку электрометр не различает знака заряда, то нельзя сказать, отрицательный ли заряд был на электрометре, или положительный. Затем, Гарри касается палочкой электрометра, и стрелка стала показывать 2 деления. Поскольку у Гарри была эбонитовая палочка, которую он тер о мех, то палочка имеет отрицательный заряд. Поэтому, если на электрометре был заряд -6, то нельзя было бы сообщив электрометру отрицательный заряд с палочки получить 2 деления. Таким образом, на электрометре был заряд $+6$. Но тогда на палочке может быть заряд либо -4, либо -8. Оба этих случая дадут заряд либо $+2$, либо -2, что для электрометра без разницы, ведь он не различает знака заряда. Тогда, коснувшись палочкой во второй раз, мы бы получили значения либо -2, либо -10. Таким образом, мы получаем, что наибольший заряд, который может показать электрометр, соответствует 10 делениям.

9.4. В трубу площади поперечного сечения $S = 10$ см^2 поступает несжимаемая жидкость со скоростью $v_1 = 1$ м/с и выходит из трубы со скоростью $v_2 = 0{,}7$ м/с (см. рисунок). В середине трубы имеется отверстие площади $s = 1$ см^2, из которого бьет фонтанчик. Найдите высоту фонтанчика h. Считайте, что $g = 10$ м/с^2.



Правильный ответ: $h = 45$ см.

Решение. Чтобы найти среднюю скорость жидкости v в основании фонтанчика, воспользуемся законом сохранения массы жидкости: внутри трубы жидкость никуда не пропадает, и не берется из ниоткуда.

За время Δt в трубу входит масса жидкости $\Delta m = \rho \Delta V = \rho S v_1 \Delta t$. За это же время та же масса жидкости выходит как с противоположного края трубы, так и через отверстие в середине трубы. То есть $\Delta m = \rho S v_2 \Delta t + \rho s v \Delta t$. Приравняв соответствующие выражения, найдем среднюю скорость жидкости в основании фонтанчика:

$$v = (v_1 - v_2)\frac{S}{s}.$$

Высоту фонтанчика найдем из формулы

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}\left(\frac{S}{s}\right)^2 = 45 \text{ см}.$$

9.5. Резиновый шарик кинули со скоростью 4 м/с под углом 30° к абсолютно гладкой теплоизолированной поверхности. При этом, каждый раз ударяясь о поверхность, он теряет часть своей энергии. Считая, что вся потерянная энергия переходит во внутреннюю энергию шарика, найдите, насколько изменится температура шарика, когда его прыжки прекратятся. Теплоемкость материала шарика равна 200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$.

Ответ запишите с точностью до тысячных долей градуса (например, $\Delta T = 3{,}450$ градуса).

Правильный ответ: $\Delta T = 0{,}010$ градуса.

Решение. В условии задачи сказано, что плоскость абсолютно гладкая. Это означает, что после того, как прыжки шарика прекратятся, он будет скользить вдоль плоскости. При каждом ударе теряется вертикальная составляющая скорости, а горизонтальная остается той же самой (поскольку нет силы трения). Поэтому во внутреннюю энергию перейдет только часть кинетической энергии, куда входит вертикальная проекция скорости шарика:

$$\frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{2} = Q = cm\Delta T.$$

Отсюда находим

$$\Delta T = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2c} = 0{,}010 \text{ градуса}.$$

9.6. Звезды по типу нашего Солнца, исчерпав свое ядерное горючее, «умирают», превращаясь в белых карликов — объекты, имеющие размер примерно с нашу планету, которые затем медленно остывают за счет теплового излучения. Ученые обнаружили два таких белых карлика, причем первый из них имеет радиус R и массу M, а второй — радиус $2R$ и массу $M/8$ (у белых карликов, чем больше их радиус, тем меньше масса). На момент наблюдения оба карлика имели одинаковую температуру и состав. Известно, что второй карлик остывает на 1° за 15 тысяч лет. За какое время Δt первый карлик остынет на 1°?

Правильный ответ: $\Delta t = 480$ тысяч лет.

Решение. Скорость остывания пропорциональна площади поверхности карлика, с которой уходит тепловое излучение. У второго карлика площадь поверхности больше (так как больше его радиус). Количество теплоты, которое нужно отдать при остывании на 1 градус, пропорционально массе, которая у второго карлика меньше. Следовательно, второй карлик и отдает тепло быстрее, и запас тепла в нем меньше, поэтому он должен остывать быстрее.

Пусть мощность, теряемая карликом с единицы поверхности w (измеряется в Вт/м^2 и как-то зависит от T). Тогда полная мощность остывания $P = wS$, а полное отданное тепло $Q = Pt = wSt$.

Количество тепла, требуемого при остывании на ΔT, равно $cM\Delta T$. Поэтому для первого карлика имеем

$$wSt_1 = cM\Delta T,$$

а для второго

$$4wSt_2 = c\frac{M}{8}\Delta T.$$

(Температуры и состав карликов одинаковы, поэтому w и c одинаковы, а при увеличении радиуса в 2 раза площадь растет в 4).

Поделив первое уравнение на второе, имеем

$$\frac{t_1}{4t_2} = 8.$$

Таким образом, время остывания первого карлика

$$t_1 = 32t_2 = 32 \cdot 15 = 480 \text{ тысяч лет.}$$

9.7. При подключении двух ламп параллельно, одна из ламп имеет мощность 225 Вт, а при подключении их последовательно эта же лампа имеет мощность только 25 Вт. Найдите мощность второй лампы W_2 во втором случае (когда лампы соединены последовательно). Напряжение сети постоянно и (если нужно) равно 220 В.

Правильный ответ: $W_2 = 50$ Вт.

Решение. Поскольку при параллельном соединении ламп, на них падение напряжения одинаковое, то воспользуемся следующими формулами для потребляемой мощности

$$W_1^{(1)} = \frac{U^2}{R_1}, \quad W_2^{(1)} = \frac{U^2}{R_2}.$$

При последовательном соединении ламп, через них потечет одинаковый ток, равный $I = U/(R_1 + R_2)$, где R_1 и R_2 — сопротивления ламп. Тогда, потребляемая мощность каждой из ламп равна

$$W_1^{(2)} = I^2 R_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}, \quad W_2^{(2)} = I^2 R_2 = \frac{U^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

По условию задачи нам известны $W_1^{(1)}$ и $W_1^{(2)}$. Поэтому поделим $W_1^{(1)}$ на $W_1^{(2)}$. В результате получим

$$\frac{W_1^{(1)}}{W_1^{(2)}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2.$$

Отсюда нетрудно выразить отношение сопротивлений ламп

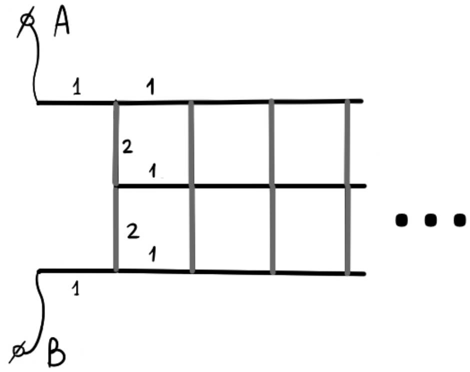
$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{W_1^{(1)}}{W_1^{(2)}}} - 1.$$

Теперь разделим искомое $W_2^{(2)}$ на $W_1^{(2)}$, тогда

$$\frac{W_2^{(2)}}{W_1^{(2)}} = \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{W_1^{(1)}}{W_1^{(2)}}} - 1 = 2.$$

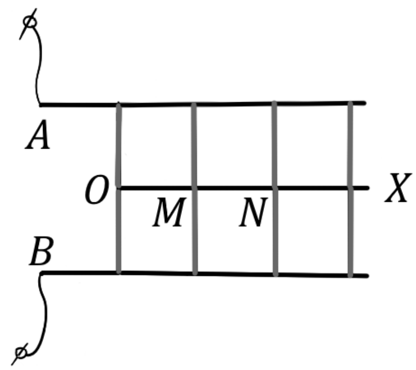
Значит $W_2^{(2)} = 2W_1^{(2)} = 50$ Вт.

9.8. Дана бесконечная проводящая сетка. Считая, что сопротивление каждого ребра сетки, покрашенного в черный цвет, равно 1 Ом, а ребра, покрашенного в серый цвет, равно 2 Ом, найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B.

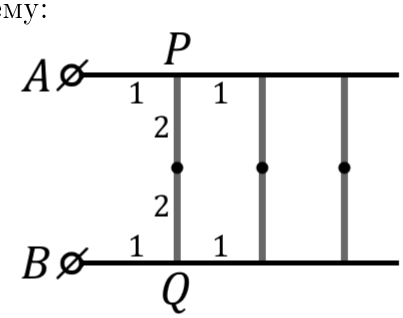


Правильный ответ: $R_{AB} = 4$ Ом.

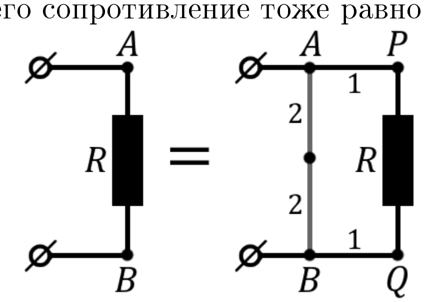
Решение.



Заметим, что из симметрии потенциалы всех точек линии OX — одинаковы (и равны среднеарифметическому потенциалов точек A и B). Поэтому разность потенциалов между точками O и N, N и M и так далее равна нулю и ток по этим ребрам не идет (то есть, их можно удалить). Получаем схему:



Пусть сопротивление между точками A и B $R_{AB} = R$; но тогда участок справа от PQ повторяет всю схему, то есть его сопротивление тоже равно R. Получается:



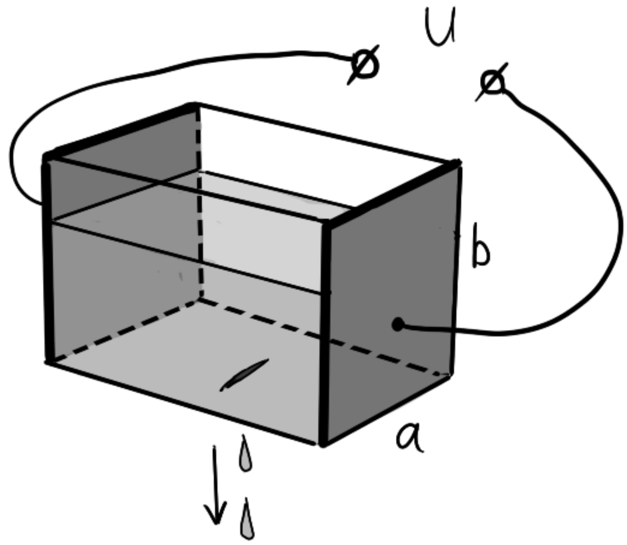
то есть

$$R = \frac{4(R+2)}{4+(R+2)}.$$

Решая, находим $R = 2$ Ом.

9.9. Прямоугольный сосуд с хорошо проводящими боковыми стенками со сторонами $a = 10$ см и $b = 20$ см был заполнен жидкостью с удельным сопротивлением $\rho = 1$ Ом $\cdot$ м и подключен к источнику постоянного напряжения $U = 3$ В. Из-за трещины в дне сосуда каждую секунду из него вытекает небольшое количество жидкости объема $V = 8$ см^3. Какой общий заряд q протечет в схеме за все время вытекания жидкости?

Примечание: остальные стенки сосуда, кроме тех, что подсоединены к источнику напряжения (на рисунке закрашены темно-серым), ток не проводят.



Правильный ответ: $q = 75$ Кл.

Решение. Посмотрим, как меняется уровень жидкости h в аквариуме. В начальный момент времени $h(0) = b$, в момент времени, когда вся жидкость вытекла, имеем $h(T) = 0$, где T — время, за которое вытечет вся жидкость через трещину. Это время можно вычислить, зная, что в начальный момент времени объем жидкости был равен abc, где c — длина сосуда, и что каждую секунду терялся объем V, то есть

$$T = \frac{abc}{V}.$$

Поскольку высота уровня жидкости в аквариуме уменьшалась, то электрическое сопротивление жидкости R увеличивалось, так как оно обратно пропорционально площади $ah(t)$. Отсюда следует, что сила тока в цепи с течением времени уменьшалась, так как согласно закону Ома

$$I(t) = \frac{U}{R(t)} = \frac{U}{\rho c} a h(t)$$

(напряжение постоянно, так как аквариум подключен к источнику постоянного напряжения).

Вычислим среднюю силу тока

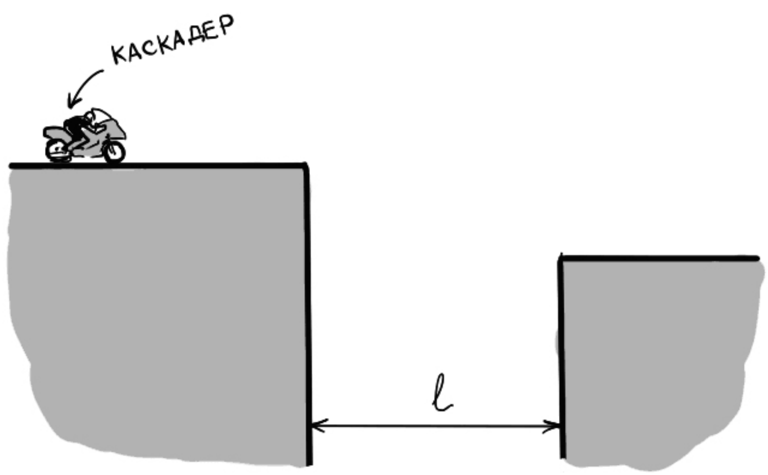
$$\langle I \rangle = \frac{I(0) + I(T)}{2} = \frac{Uab}{2\rho c}.$$

Полный заряд, прошедший через цепь за все время вытекания жидкости:

$$q = \langle I \rangle T = \frac{U(ab)^2}{2\rho V} = 75 \text{ Кл}.$$

Примечание: можно было бы построить график изменения $I(t)$, и посчитать площадь под графиком (это будет площадь прямоугольного треугольника). Такой способ более правильный, в случае, когда через трещину каждую секунду вытекал бы различный объем жидкости (тогда зависимость $I(t)$ не была бы линейной).

9.10. Каскадеру нужно перескочить на мотоцикле пропасть между домами. Известно, что ширина пропасти $l = 10$ м, а крыша второго дома на 1,25 м ниже крыши первого. С каким наименьшим ускорением a каскадер должен разгоняться по горизонтальной крыше первого дома на своем мотоцикле, если он начинает разгон на расстоянии 25 м от края крыши? Если нужно, ответ округлите до целого числа.



Правильный ответ: $a = 8$ м/с^2.

Решение. Разность уровней домов $h = 1{,}25$ м. Каскадер падает это расстояние по вертикали:

$$\frac{gt^2}{2} = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0{,}5 \text{ секунды}.$$

За это время он должен пролететь над крышами, то есть его минимальная набранная горизонтальная скорость равна

$$Vt = l \Rightarrow V = \frac{l}{t} = 20 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Каскадер должен получить эту скорость на пути L:

$$L = \frac{V^2 - V_0^2}{2a},\, V_0 = 0 \Rightarrow a = \frac{V^2}{2L} = \frac{20^2}{2 \cdot 25} = 8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$