Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017-2018 учебный год
Решения задач отборочного этапа

8 класс

8.1. Задумчивый Пятачок шел из магазина домой с постоянной скоростью 5 км/ч. Дойдя до подъезда своего дома, он понял, что забыл в магазине свои продукты на кассе. Недолго думая, он помчался обратно в магазин, решая на ходу очередную задачку: с какой скоростью он должен бежать обратно к магазину, чтобы его средняя скорость на пути «магазин-дом-магазин» была в два раза больше скорости по пути домой? Расстояние от магазина до дома Пятачка равно 200 метров.

Варианты ответа:

A) 10 км/ч; **B)** 15 км/ч; **C)** 20 км/ч; **D)** 1200 км/ч; **E)** это невозможно.

Правильный ответ: E) это невозможно.

Решение. Действительно, давайте рассмотрим путь Пятачка от магазина до дома. Мы можем записать:

$$v_1 = \frac{L}{t_1},$$

где v_1 — скорость, с которой Пятачок шел домой, L — расстояние от магазина до дома, t_1 — время, которое затратил Пятачок, чтобы дойти от магазина до дома.

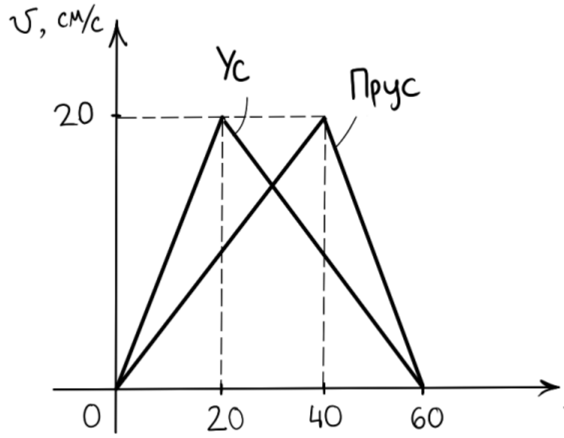
Ничего не изменится, если мы умножим на 2 левую и правую часть записанного равенства. Получим

$$2v_1 = \frac{2L}{t_1}.$$

Внимательно присмотревшись, замечаем, что слева написана интересующая нас средняя скорость $v_{\text{ср}} = 2v_1$, а справа, в числителе, — полный путь $2L$. Тогда, согласно определению, в знаменателе должно стоять полное время. Но оно должно быть равно $t = t_1 + t_2$, где t_2 — это время, за которое Пятачок должен добраться от дома до магазина. Получается, что $t_2 = 0$, то есть Пятачок должен бежать обратно до магазина с бесконечной скоростью, чтобы затратить на это нулевое время. А это невозможно.

8.2. Два таракана Ус и Прус разминались перед забегом, бегая по одной дорожке. Они попросили третьего таракана Труса понаблюдать за ними и нарисовать график скоростей их движения от времени. Тараканы стартовали одновременно и из одной точки.

1. В какой момент времени t расстояние между Усом и Прусом было наибольшим?
2. И чему равнялось это расстояние L?



Правильный ответ: $t = 30$ сек, $L = 150$ см.

Решение. Из графика видно, что в первые 30 секунд забега скорость Уса была больше, чем у Пруса, то есть Ус был настолько быстр, что постоянно увеличивал дистанцию между ним и Прусом. В момент времени $t = 30$ сек, их скорости сравнялись, и далее скорость Уса стала меньше, чем у Пруса. Иными словами, Прус начал догонять Уса и уменьшать дистанцию между ними. Исходя из этого наблюдения заключаем, что наибольшее расстояние между Усом и Прусом приходилось на момент времени $t = 30$ сек.

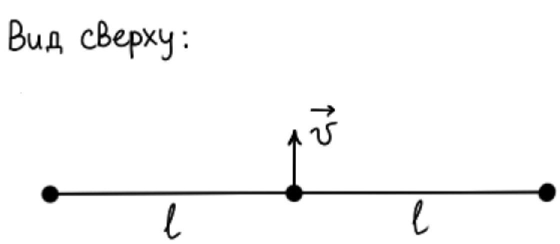
Чтобы посчитать максимальное расстояние между ними, мы должны из пути, которое пробежал Ус за 30 секунд вычесть путь, который пробежал Прус за то же время. Это можно сделать с помощью формул равноускоренного движения, но будет проще просто посчитать площадь под графиками $V(t)$ тараканов к моменту времени $t = 30$ сек. Учитывая еще, что их скорости в этот момент равны $V = 15$ см/с, находим площади:

$$S_1 = \frac{20 \cdot 20}{2} + \frac{20 + 15}{2} \cdot 10 = 375 \text{ см}, \quad S_2 = \frac{15 \cdot 30}{2} = 225 \text{ см}.$$

Их разность равна

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 150 \text{ см}.$$

8.3. На гладком столе находятся три шара, связанных нерастяжимыми и невесомыми нитями длины $l = 80$ см каждая (см. рисунок). Средний шар начинают двигать вдоль стола с постоянной скоростью $v = 6{,}28$ см/с, направленной перпендикулярно нитям. Определите время T (с точностью до секунды), за которое крайние шары столкнутся. Считайте шары материальными точками.



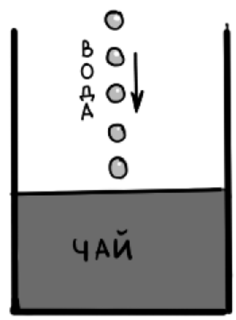
Правильный ответ: $T = 20$ сек.

Решение. Перейдем в систему отсчета, где центральный шар покоится. Тогда в этой системе отсчета крайние шары будут двигаться с постоянной скоростью $v = 6.28$ см/с по дугам окружностей радиуса $l = 80$ см. Причем до столкновения, каждый из крайних шаров должен пройти четверть окружности.

Поскольку скорость каждого из шаров постоянна, то мы легко можем вычислить время их движения. Для этого, рассмотрим какой-либо из шаров. Пройденный им путь равен четверти длины окружности, то есть $S = \pi l/2$. Тогда

$$T = \frac{\pi l}{2v} = \frac{3.14 \cdot 80}{2 \cdot 6.28} = 20 \text{ сек.}$$

8.4. Очень педантичный Кролик попросил Пятачка сделать ему чай, причем чтобы температура чая равнялась в точности 81°C. Пятачок сделал следующее: заварил в достаточно высокой кружке 200 г чая температурой 100 градусов. И далее капал туда холодную воду температурой 5 градусов. Известно, что каждую секунду в кружку с чаем падало по 10 капелек холодной воды, каждая по 0,2 грамма. Сколько времени t нужно Пятачку капать воду, чтобы температура в кружке достигла 81°C? Считайте, что теплообмен происходит только между горячим чаем и холодной водой, причем их теплоемкости равны.



Правильный ответ: $t = 25$ сек.

Решение. Между чаем и водой происходит теплообмен, в результате чего попавшая в чай вода нагревается, забирая тепло у чая. Полная масса воды, которая попала в чай равна $m_{\text{воды}} = N m_{\text{капли}}$, где N — количество капель воды, которое упало в чай. Поскольку энергия сохраняется, то мы можем записать

$$c_{\text{воды}} N m_{\text{капли}} (\theta - T_{\text{воды}}) = c_{\text{чая}} m_{\text{чая}} (T_{\text{чая}} - \theta),$$

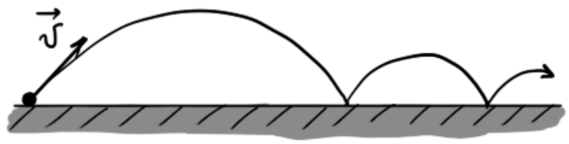
где $\theta = 81$ градус.

Согласно условиям задачи, теплоемкость воды и чая одинакова, поэтому их можно сократить. В результате, получаем

$$N = \frac{m_{\text{чая}}(T_{\text{чая}} - \theta)}{m_{\text{капли}}(\theta - T_{\text{воды}})} = \frac{200(100 - 81)}{0.2(81 - 5)} = 250 \text{ штук.}$$

Поскольку каждую секунду падало по 10 капелек воды, то 250 капелек упало за $t = 10$ секунд.

8.5. Резиновый шарик кинули со скоростью 4 м/с под некоторым углом к теплоизолированной поверхности. При этом, каждый раз ударяясь о поверхность, он теряет часть своей энергии. Считая, что вся потерянная энергия переходит во внутреннюю энергию шарика, найдите, на сколько изменится температура шарика ΔT, когда его прыжки прекратятся и он полностью остановится. Теплоемкость материала шарика равна 200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$.



Правильный ответ: $\Delta T = 0{,}04$ градуса.

Решение. Когда шарик остановился, то вся его кинетическая энергия перешла во внутреннюю (то есть шарик нагрелся). Поэтому

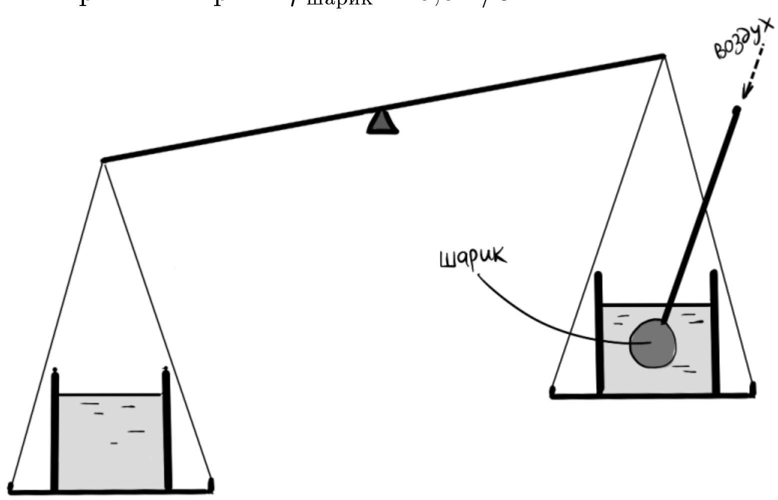
$$\frac{mv^2}{2} = cm\Delta T.$$

Отсюда можно найти изменение температуры шарика

$$\Delta T = \frac{v^2}{2c} = \frac{4^2}{2 \cdot 200} = 0{,}04 \text{ градуса}.$$

8.6. На весах имеются два одинаковых стакана с водой: в одном стакане 200 г воды, а в другом — 150 г. В тот стакан, в котором меньше воды, опускают тонкую соломинку, на конце которой прикреплен небольшой воздушный шарик. Шарик начинают надувать через соломинку. До какого объема V его нужно надуть, чтобы весы оказались уравновешены? Объем самой соломинки не учитывайте.

Если нужно, используйте: постоянная силы тяжести $g = 10$ Н/кг, плотность воды $\rho_{\text{вода}} = 1$ г/см^3, плотность материала шарика $\rho_{\text{шарик}} = 0{,}5$ г/см^3.



Правильный ответ: $V = 50$ см^3.

Решение. На шарик, погруженный в жидкость, действует выталкивающая сила Архимеда. В свою очередь, шарик действует на жидкость с той же по модулю силой, но противоположно направленной. Таким образом, на правую чашу весов давит не только вес жидкости в стакане, но и сила со стороны шарика, равная $\rho g V$, где ρ — плотность воды, V — объем шарика. Необходимо, чтобы эта сила скомпенсировала разницу в весе воды Δmg. Поэтому получаем

$$V = \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{50}{1} = 50 \text{ см}^3.$$

8.7. На космическом корабле имеется большая ванна с 30 кг воды при 0°C. Незнайка решил стать первым человеком, который примет бодрящую ванну в открытом космосе. Однако, как только ванну поместили за борт космического корабля, часть воды испарилась, а часть замерзла. Определите массу m оставшегося в ванне льда.

Если нужно, используйте: теплоемкость воды $C = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, удельная теплота испарения $L = 2210$ кДж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг.

Правильный ответ: $m = 26$ кг.

Решение. Парообразование идет с поглощением энергии, и необходимое для этого количество тепла вычисляется по формуле $Q = Lm_1$, где m_1 — масса образовавшегося пара. При образовании льда, тепло, наоборот, выделяется, причем $Q = \lambda m_2$, где m_2 — масса образовавшегося льда. Так как исходно массы воды равнялась m, то $m_1 + m_2 = m$, и мы можем записать, что

$$L(m - m_2) = \lambda m_2.$$

Отсюда находим массу образовавшегося льда

$$m_2 = \frac{L}{\lambda + L} m = \frac{2100}{340 + 2100} \cdot 30 = 26 \text{ кг}.$$

8.8. Туристам Петру и Павлу нужно как можно быстрее отнести 31 кг полезного груза продуктов и медикаментов в соседний лесной лагерь. Расстояние до лагеря 15 км 400 м. Петр может, идя налегке, поддерживать скорость 6 км/ч, но каждый килограмм взятого груза понижает его среднюю скорость на 1% (например, если он несет 10 кг, его средняя скорость понижается на 10% или 0,6 км/ч). Павел же, идя налегке, держит среднюю скорость 5,5 км/ч, а каждый килограмм взятого груза понижает ее на 2%.

За какое наименьшее время t они могут донести весь груз в лагерь?

Правильный ответ: $t = 200$ минут.

Решение. Если первый турист несет груз x, то второй — $31 - x$; отсюда скорость первого

$$v_1 = v_{1_{max}}(1 - x\%) = v_{1_{max}}(1 - 0{,}01x)$$

и скорость второго

$$v_2 = v_{2_{max}}(1 - 2\% \cdot (31 - x)) = v_{2_{max}}(1 - 0{,}62 + 0{,}02x) = v_{2_{max}}(0{,}38 + 0{,}02x).$$

Пусть один из туристов может идти со своим грузом быстрее другого (с его грузом). Тогда если первому туристу добавить немного груза, убавив у второго, то скорость второго туриста возрастет, поэтому скорость группы (определяемая скоростью более медленного участника) — тоже возрастет. Значит, при наиболее быстрой скорости группы оба идут с равной скоростью (и перераспределение груза только ухудшает ситуацию).

Итак,

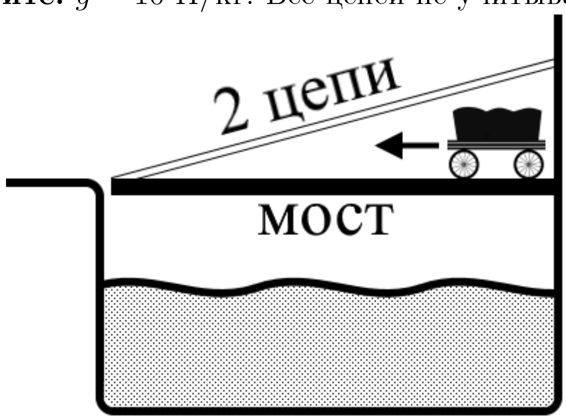
$$\begin{gathered} v_1 = v_2 \\ v_{1max}(1 - 0{,}01x) = v_{2max}(0{,}38 + 0{,}02x) \\ 6(1 - 0{,}01x) = 5{,}5(0{,}38 + 0{,}02x), \end{gathered}$$

откуда $0{,}17x = 3{,}91$ или $x = 23$ кг. Подставим это значение в любую из скоростей: $v_{max} = 6(1 - 0{,}23) = 4{,}62$ км/ч, откуда находим время:

$$t_{min} = \frac{S}{v_{max}} = \frac{31}{4{,}62} = 3\frac{1}{3} \text{ часа} = 200 \text{ минут.}$$

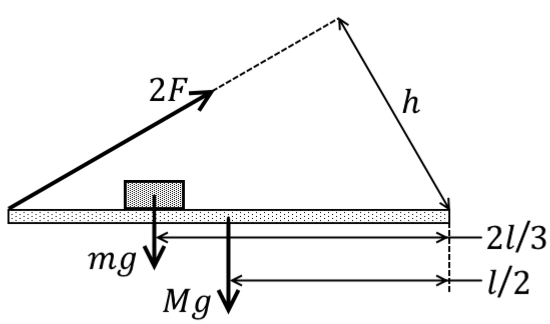
8.9. Откидной мост в замке весил 200 кг и удерживался двумя натянутыми под углом 30° цепями. Каждая из цепей выдерживала силу натяжения 20000 Н. Когда из замка выкатилась тяжело груженая повозка, то, когда она проехала ровно 2/3 моста, цепи лопнули. Сколько килограмм была масса m повозки?

Если нужно, используйте: $g = 10$ Н/кг. Вес цепей не учитывайте.



Правильный ответ: $m = 2850$ кг.

Решение. В момент обрыва цепей их общая сила будет равна $2F$, а плечо $h = l/2$ (так как угол равен 30°). Сила тяжести моста приложена к его центру масс, то есть тоже имеет плечо $l/2$.



Распишем тогда равенство моментов сил:

$$2F \cdot h = Mg \cdot \frac{2}{3}l + mg \cdot \frac{1}{2}l,$$

откуда

$$F = \frac{2}{3}Mg + \frac{1}{2}mg$$

или

$$M = \frac{3}{2}\frac{F}{g} - \frac{3}{4}m = \frac{3}{2}\cdot 2000 - \frac{3}{4}\cdot 200 = 2850 \text{ кг.}$$

8.10. Поезд метро, закрыв двери, движется в депо. Он проезжает с постоянной скоростью мимо платформы длиной 300 м, а по последнему его вагону (длиной 20 м), тоже с постоянной скоростью, бегает туда-сюда проснувшийся пассажир. Пассажир спал в конце вагона и, проснувшись в момент, когда рядом с ним началась платформа, сразу начал бегать и сделал ровно 19 пробежек (10 туда и 9 обратно), остановившись ровно напротив места, где закончилась платформа. Какой путь L относительно платформы сделал пассажир за время своего бега? Ответ, если нужно, округлите до целого числа метров.

Правильный ответ: $L = 395$ метров.

Решение. Пусть длина платформы — S (= 300 м), вагона — l (= 20 м), скорость поезда — V, а пассажира относительно вагона — v.

Пассажир и вперед, и назад пробегает вагон за равное время t: $vt = l$. Число пробежек вперед $N_+ = 10$, назад — $N_- = 9$; полное время движения равно $(N_+ + N_-)t$.

Так как пассажир сделал нечетное число пробежек, он остановился в передней точке вагона.

Поезд прошел путь:

$$L - l = 280 \text{ (м)} = (N_+ + N_-)tV. \tag{10.1}$$

Пассажир же относительно вагона прошел расстояние:

$$(N_+ + N_-)l = 19 \cdot 20 = 380 \text{ (м)} = (N_+ + N_-)tv. \tag{10.2}$$

Из (10.1) и (10.2) следует, что

$$\frac{V}{v} = \frac{280}{380} = \frac{14}{19}.$$

Путь пассажира относительно платформы равен

$$L = N_+ \cdot (v + V)t + N_-|v - V|t,$$

а так как $v > V$, то

$$L = (N_+ + N_-)vt + (N_+ - N_-)Vt = 380 + Vt =$$
$$= 380 + \frac{V}{v}\cdot vt = 380 + \frac{14}{19}\cdot 20 \approx 380 + 14{,}7 \approx 395 \text{ метров.}$$