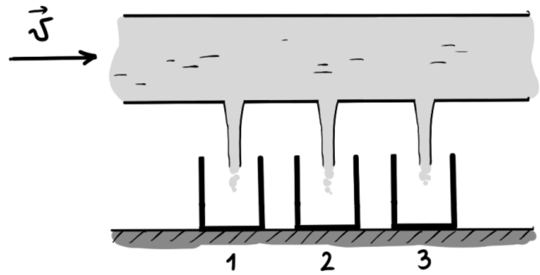
Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017-2018 учебный год
Решения задач отборочного этапа

11 класс

11.1. Вода течет по трубе, постоянно заполняя все сечение. В трубе проделаны три одинаковых отверстия на не слишком большом расстоянии друг от друга. Под каждым отверстием находится стакан. Какой из стаканов заполнится водой быстрее?



Варианты ответа:

A) первый; **B)** второй; **C)** третий; **D)** первый и третий; **E)** все заполнятся одинаково.

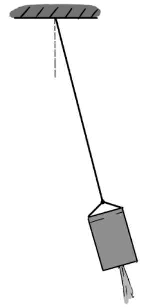
Правильный ответ: C) третий.

Решение. Количество жидкости, вытекающей из отверстия в единицу времени, зависит от разности давлений над и под отверстием. Так как вне трубы давление постоянно и равно атмосферному, то ответ будет зависеть от того, над каким из отверстий давление в жидкости больше. Для начала заметим, что после прохождения каждого их отверстий, скорость жидкости в трубе уменьшается (согласно условию задачи, она занимает все сечение трубы). К этому выводу можно прийти, следующим образом: часть жидкости вытекает, следовательно, через ту же площадь трубы за то же самое время течет меньший объем жидкости, следовательно, скорость течения жидкости по трубе уменьшается. Таким образом, при прохождении жидкостью над третьим отверстием, она имеет меньшую скорость, чем при прохождении первого и второго отверстий. Так как жидкость в трубе замедляется, то на нее справа налево должна действовать тормозящая сила ΔpS (где p — давление, S — площадь трубы), то есть давление в жидкости возрастает с уменьшением ее скорости. Это (тем, кто знает) можно доказать и с помощью уравнения Бернулли. Итак, мы получаем, что давление над третьим отверстием будет больше, чем над первыми двумя, и поэтому через него вытечет больше жидкости за то же время.

11.2. Бочка, доверху заполненная водой, подвешена на длинной веревке и совершает малые колебания относительно положения равновесия. В дне бочки проделано небольшое отверстие, через которое вытекает вода. Через некоторое время вся вода из бочки вытекла. Как изменялся период колебаний бочки по мере вытекания воды? Считайте, что колебания малой амплитуды происходят все время, пока жидкость вытекает.

Варианты ответа:

A) все время уменьшался; **B)** все время увеличивался; **C)** сначала увеличивался, затем уменьшался; **D)** сначала уменьшался, затем увеличивался; **E)** не изменялся.



Правильный ответ: C) сначала увеличивался, затем уменьшался.

Решение. Будем рассматривать бочку, как математический маятник, совершающий малые колебания относительно своего положения равновесия. Как известно, период колебаний такого маятника определяется согласно формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где, в данном случае, l — это расстояние от точки подвеса до **центра масс** бочки с водой (которая находится внутри бочки), g — ускорение свободного падения.

Несложными рассуждениями можно показать, что по мере вытекания воды из бочки величина l сначала увеличивается, а затем уменьшается. Предположим, что масса бочки мала по сравнению с массой жидкости внутри нее. Изначально центр масс был сосредоточен в середине бочки. По мере вытекания воды, ее уровень в бочке уменьшается, и, следовательно, понижается и центр масс (l растет). Когда вся жидкость вытечет, центр масс оставшейся пустой бочки снова будет в середине. Такие же рассуждения годятся для любого соотношения масс бочки и воды в ней (даже в случае, когда масса бочки много больше массы воды в ней, просто смещение центра масс будет небольшим). Таким образом, в процессе вытекания воды, l сначала увеличивалось, а затем уменьшалось до своего исходного значения.

11.3. Если поместить деревянный кубик на поверхность воды в сосуде, то он будет совершать малые колебания относительно своего положения равновесия.

1. Как изменится частота колебаний кубика, если платформа, на которой находится сосуд, будет двигаться вверх с ускорением $8g$?
   A) не изменится;
   B) увеличится в n раз(а);
   C) уменьшится в n раз(а).
2. Чему равно n?

Замечание: если вы выбрали ответ A), то пишите $n = 1$.

Правильный ответ: B) увеличится в $n = 3$ раза.

Решение. Для того, чтобы решить эту задачу, рассмотрим отклонение кубика от состояния равновесия на малую величину x. Тогда, нескомпенированная силой тяжести добавка к силе Архимеда будет равна

$$\Delta F_A = \rho_0 g l^2 x.$$

Эта сила стремится вернуть кубик в исходное положение равновесия. Важно то, что она прямо пропорциональна смещению. Значит, коэффициент, стоящий перед x, можно рассматривать как некоторую эффективную жесткость k. Следовательно, частота колебаний кубика

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{g}{l}.$$

Эта формула годится как для случая неподвижной платформы, так и для подвижной. Если платформа движется вверх с ускорением $a = 3g$, то можно перейти в неинерциальную систему отсчета, движущуюся вместе с платформой. Записав уравнение движения кубика в новой системе отсчета, можно обнаружить, что все сводится к формальной замене

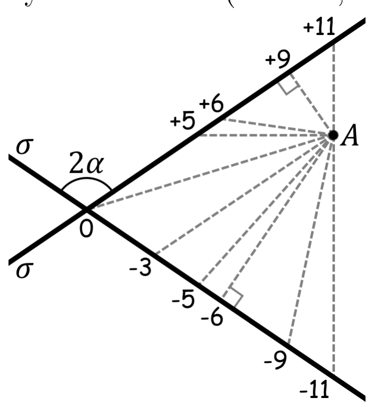
$$g \to g' = g + a = 9g.$$

Но остальные параметры задачи не изменятся (даже высота погружения кубика останется той же самой!). Поэтому имеем

$$\frac{\omega'^2}{\omega^2} = \sqrt{\frac{g'}{g}} = 3.$$

11.4. Имеются две равномерно заряженные диэлектрические бесконечные плоскости, пересекающиеся под углом 2α (см. рисунок). Частицу с положительным зарядом q отпустили из точки A с нулевой начальной скоростью. Обе плоскости имеют отрицательный поверхностный заряд σ. Сила тяжести отсутствует. В точку с какой координатой x попадет шарик?

Приблизительные координаты некоторых точек попадания на рисунке отмечены в сантиметрах; свой ответ записывайте с учетом знака (то есть, например, 8 или 0, но -5).



Правильный ответ: $x = +5$ см.

Решение. Вектор напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженной плоскости не зависит от расстояния от плоскости, направлено перпендикулярно к плоскости и равно

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где σ — заряд, приходящийся на единицу площади поверхности плоскости, ε_0 — диэлектрическая постоянная.

Если поверхностный заряд σ меньше нуля, то вектор напряженности будет направлен к плоскости.

Далее, воспользуемся принципом суперпозиции. Из симметрии видно, что при сложении одинаковых полей от каждой плоскости, результирующее поле будет направлено горизонтально справа налево. То есть в какую бы точку рассматриваемого сектора мы не поместили пробный заряд (с нулевой начальной скоростью), он будет двигаться строго горизонтально по направлению к плоскостям. Если бы у заряда была ненулевая начальная скорость, то в таком электрическом поле он бы двигался по параболе, как в поле силы тяжести.

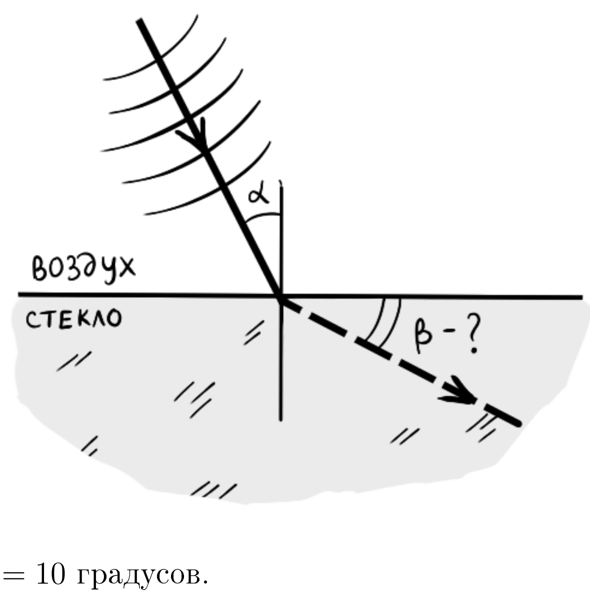
11.5. В комнате размером $5 \times 4 \times 3$ м^3 находится воздух при атмосферном давлении $p = 10^5$ Па. Найдите внутреннюю энергию воздуха U в комнате.

Правильный ответ: $U = 15$ МДж.

Решение. Подвох задачи был в том, что воздух — это двухатомный газ. Поэтому для внутренней энергии нужно было пользоваться формулой

$$U = \frac{5}{2}\nu RT = \frac{5}{2}pV.$$

11.6. Звуковая волна падает на стекло под небольшим углом α к нормали таким, что $\sin\alpha = 0{,}1$. Под каким углом β к поверхности пойдет распространение волны в стекле? Скорость звука в воздухе $v_{\text{возд}} = 330$ м/с, скорость звука в стекле $v_{\text{стекло}} = 3250$ м/с. Ответ дайте с точностью до градуса.



Правильный ответ: $\beta = 10$ градусов.

Решение. Для решения задачи воспользуемся законом Снеллиуса, который мы часто используем в оптике для описания преломления света:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{v_{\text{воздух}}}{v_{\text{стекло}}},$$

где γ — угол преломления, связанный с искомым углом β посредством соотношения $\gamma = \pi/2 - \beta$.

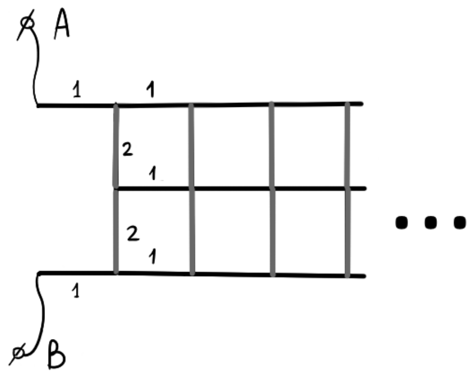
Отсюда находим

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{v_{\text{стекло}}}{v_{\text{воздух}}}\sin\alpha\right).$$

Подставляя данные задачи, и переводя все в градусы, получим, что $\beta = 10$ градусов.

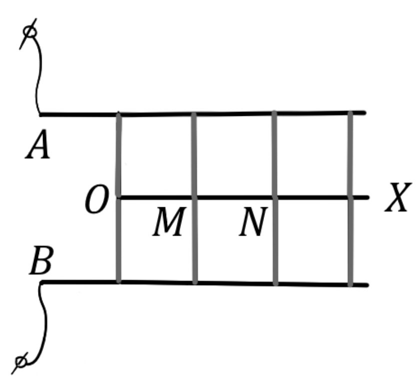
Обратим внимание, что у звуковой волны, в отличие от световой, угол преломления γ больше, чем угол падения α. Это связано с тем, что скорость звука в стекле больше, чем в воздухе, в отличие от света. Также заметим, что при сравнительно небольших углах падения звуковой волны возможно явление полного внутреннего отражения, то есть когда волна не проходит в стекло, а полностью отражается обратно в воздух. Тоже самое можно сказать при падении звука из воздуха на другие, более плотные предметы. Этим можно объяснить, почему мы так плохо слышим что либо, когда сидим у себя в комнате с закрытой дверью. Через дверь пройдет малая часть звуковых волн, которая падает под небольшими углами ($\alpha \sim 10 - 15$ градусов). Остальная же часть, падающая под остальными углами, отразится обратно.

11.7. Дана бесконечная проводящая сетка. Считая, что сопротивление каждого ребра сетки, покрашенного в черный цвет, равно 1 Ом, а ребра, покрашенного в серый цвет, равно 2 Ом, найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B.

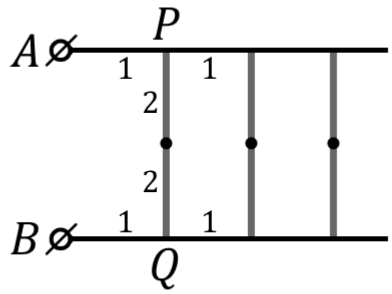


Правильный ответ: $R_{AB} = 4$ Ом.

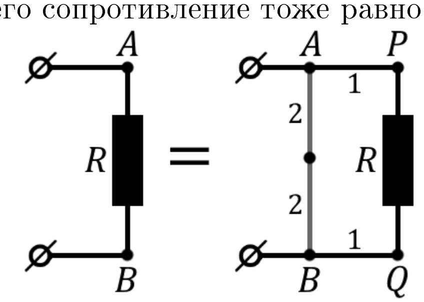
Решение.



Заметим, что из симметрии потенциалы всех точек линии OX — одинаковы (и равны среднеарифметическому потенциалов точек A и B). Поэтому разность потенциалов между точками O и N, N и M и так далее равна нулю и ток по этим ребрам не идет (то есть, их можно удалить). Получаем схему:



Пусть сопротивление между точками A и B $R_{AB} = R$; но тогда участок справа от PQ повторяет всю схему, то есть его сопротивление тоже равно R. Получается:



то есть

$$R = \frac{4(R+2)}{4+(R+2)}.$$

Решая, находим $R = 2$ Ом.

11.8. На дифракционную решетку (последовательность равноудаленных тонких параллельных щелей) падает смесь синего ($\lambda_1 = 0{,}42$ мкм) и зеленого ($\lambda_2 = 0{,}56$ мкм) излучения. После дифракции на решетке на плоском экране наблюдаются чисто синие, чисто зеленые и сине-зеленые линии максимумов (при этом чисто синих и сине-зеленых вместе оказалось 33).

Сколько на экране будет наблюдаться

1. сине-зеленых максимумов;
2. чисто зеленых максимумов?

Правильный ответ: 9 сине-зеленых и 16 чисто зеленых максимумов.

Решение. Пусть расстояние между щелями решетки равно d, тогда условие напрвления на максимум с номером N:

$$d \cdot \sin\theta = N\lambda.$$

Так как $\sin\theta < 1$ (угол $\theta = 90^\circ$ невозможен), то $N\lambda < d \Rightarrow N < d/\lambda$ для любого N, а максимальный номер определяется условием $N_{max} < d/\lambda \leqslant N_{max} + 1$.

Рассмотрим синий цвет ($\lambda_1 = 0{,}42$ мкм). Всего синих (в том числе и сине-зеленых) максимумов $X_{\text{с}} = 33$, их номера лежат от $-N_{max}$ до $+N_{max}$, включая 0, поэтому $2N_{max} + 1 = 33$, откуда $N_{max} = 16$.

Итак, $16 < d/\lambda_1 \leqslant 17$. Заметим, что $\lambda_2 = 4\lambda_1/3$, поэтому

$$\frac{d}{\lambda_2} = \frac{3}{4}\frac{d}{\lambda_1},$$

откуда

$$\frac{3}{4}\cdot 16 < \frac{d}{\lambda_2} \leqslant \frac{3}{4}\cdot 17 \;\Rightarrow\; 12 < \frac{d}{\lambda_2} \leqslant 12{,}75.$$

Поэтому максимальный возможный номер для зеленого максимума равен 12 и всего зеленых максимумов $X_з = 2\cdot 12 + 1 = 25$.

Итак, номера синих максимумов:

$$N_1 : \qquad -16, -15, \ldots, 0, \ldots, +15, +16 \qquad \text{— всего 33;}$$

номера зеленых максимумов:

$$N_2 : \qquad -12, -11, \ldots, 0, \ldots, +11, +12 \qquad \text{— всего 25.}$$

Сине-зеленый максимум — это значит, что он одновременно максимум и для синего света, и для зеленого, то есть выполнено $d\sin\theta = N_1\lambda_1$ и $d\sin\theta = N_2\lambda_2$, откуда

$$N_1\lambda_1 = N_2\lambda_2 = N_2\cdot\frac{4}{3}\lambda_1 \;\Rightarrow\; 3N_1 = 4N_2.$$

То есть, N_1 делится на 4, а N_2 — на 3.

Возможные сине-зеленые максимумы имеют номера

$$-16, \quad -12, \quad -8, \quad -4, \quad 0, \quad 4, \quad 8, \quad 12, \quad 16 \quad \text{— в списке синих}$$

и

$$-12, \quad -9, \quad -6, \quad -3, \quad 0, \quad 3, \quad 6, \quad 9, \quad 12 \quad \text{— в списке зеленых.}$$

Их количество $X_{сз} = 9$. А количество чисто-зеленых максимумов $X_{\text{чисто-з}} = X_з - X_{сз} = 16$.

11.9. Когда вырезанную из бумаги фигуру площади 28 см^2 поместили на определенном растоянии параллельно тонкой линзе, площадь ее наблюдаемого изображения составила 64 см^2. Когда же от этой фигуры отрезали $1/7$ часть, но поместили эту часть на 7 см ближе к линзе, площадь изображения только этой части стала равна 64 см^2. Какова может быть максимальная оптическая сила D такой линзы?

Если нужно, ответ округлите до целого числа диоптрий.

Правильный ответ: $D = 13$ диоптрий.

Решение. Запишем формулу тонкой линзы

$$\pm D = \pm\frac{1}{f} + \frac{1}{d}, \tag{9.1}$$

причем знак перед D определяется тем, собирающая или рассеивающая линза, а знак перед f — действительное или мнимое изображение.

Далее будем считать, что работаем с собирающей линзой, так как по условию задачи первое изображение было наблюдаемым, а в рассеивающей линзе изображение действительного предмета всегда является мнимым. Поэтому перед D выбираем знак плюс.

Линейное увеличение предмета определяется как $\Gamma = f/d$ и в данной задаче его можно определить через площади изображения и предмета:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{S_f}{S_d}}.$$

Используя, что $f = \Gamma d$, формулу для D можно переписать и в терминах Γ. Для этого в (9.1) вынесем за скобку $1/d$, тогда получим

$$D = \frac{1}{d}\left(1 \pm \frac{1}{\Gamma}\right).$$

Так как в обоих случаях использовалась одна и та же линза, то имеем

$$D = \frac{1}{d_1}\left(1 + \frac{1}{\Gamma_1}\right) = \frac{1}{d_2}\left(1 \pm \frac{1}{\Gamma_2}\right), \tag{9.2}$$

причем слева стоит знак плюс, так как изображение было наблюдаемым (то есть действительным). Однако, про второе изображение в задаче ничего не сказано, и оно может быть как мнимым, так и действительным. Поэтому неопределенность в знаке оставлена.

Поскольку по условию задачи $d_2 = d_1 - 0{,}07$, то мы можем найти d_1 из формулы (9.2):

$$\frac{d_2}{d_1} = 1 - \frac{0.07}{d_1} = \frac{1 \pm \frac{1}{\Gamma_2}}{1 + \frac{1}{\Gamma_1}} \quad \to \quad \frac{1}{d_1} = \frac{1}{0.07}\left(1 - \frac{1 \pm \frac{1}{\Gamma_2}}{1 + \frac{1}{\Gamma_1}}\right).$$

Подставляя d_1 в формулу для тонкой линзы, найдем

$$D = \frac{1}{d_1}\left(1 + \frac{1}{\Gamma_1}\right) = \frac{1}{0.07}\left(\left(1 + \frac{1}{\Gamma_1}\right) - \left(1 \pm \frac{1}{\Gamma_2}\right)\right)$$

или

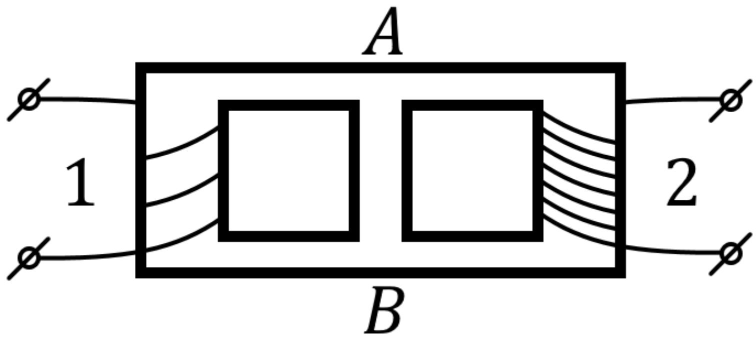
$$D = \frac{1}{0.07}\frac{\Gamma_1 \mp \Gamma_2}{\Gamma_1 \Gamma_2}.$$

Здесь знак минус соответствует действительному изображению, а знак плюс — мнимому. Видим, что оптическая сила линзы D будет максимальной, если выбрать знак плюс. Эта ситуация соответствует случаю, когда предмет изначально находился между F и $2F$, а затем его подвинули так, что он казался между 0 и F. Подставив численные данные, получим $D \approx 13$ дптр.

11.10. Если на вход 1 трансформатора с симметричным сердечником подать переменное напряжение 45 В, то идеальный вольтметр, подключенный к клеммам 2, покажет 240 В.

Если же на вход 2 подать 240 В, то вольтметр, подключенный к клеммам 1, покажет 20 В. Что покажет в первом случае (при подаче на клеммы 1 45 В) вольтметр на клеммах 2, если всю катушку 2 перемотать с тем же количеством витков на центральную перемычку AB сердечника?

Считайте, что весь поток с трансформатора не выходит из объема сердечника, а сопротивление катушек пренебрежимо мало.



Правильный ответ: Показание вольтметра будет равно 120 Вольт.

Решение. Если катушкой 1 в трансформаторе создан поток $\Phi_1 = \Phi$, то он, оставаясь весь в сердечнике, разделится: какая-то доля x этого потока пойдет в участок AB сердечника (то есть $\Phi_{AB} = x\Phi$), остальное — в сердечник второй катушки ($\Phi_2 = (1-x)\Phi$).

Отношение напряжений на катушках равно отношению (переменных) полных потоков в них, то есть

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2\Phi_2}{N_1\Phi_1} = \frac{N_2(1-x)\Phi}{N_1\Phi},$$

откуда

$$\frac{240}{45} = \frac{16}{3} = \frac{N_2}{N_1}(1-x). \tag{10.1}$$

Из симметрии сердечника, если подавать напряжение во вторую катушку и поток $\Phi_2 = \Phi$, то $\Phi_1 = (1-x)\Phi$, поэтому в этом случае

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1\Phi_1}{N_2\Phi_2} = \frac{N_1(1-x)\Phi}{N_2\Phi},$$

или

$$\frac{20}{240} = \frac{1}{12} = \frac{N_1}{N_2}(1-x). \tag{10.2}$$

Перемножим уравнения (10.1) и (10.2):

$$\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{12} = \frac{4}{9} = (1-x)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Если перемотать катушку 2 на перемычку AB и подать напряжение U_1, то в катушку 2 попадет не поток $\Phi_2 = (1-x)\Phi = 2\Phi/3$, но поток $\Phi_{AB} = x\Phi = \Phi/3$, то есть поток упадет в 2 раза, и из-за этого и напряжение упадет в 2 раза.