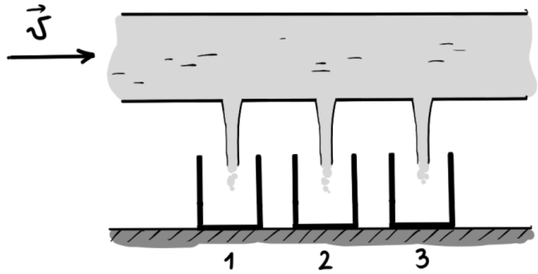
Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017-2018 учебный год
Решения задач отборочного этапа

10 класс

10.1. Вода течет по трубе, постоянно заполняя все сечение. В трубе проделаны три одинаковых отверстия на не слишком большом расстоянии друг от друга. Под каждым отверстием находится стакан. Какой из стаканов заполнится водой быстрее?



Варианты ответа:

A) первый; **B)** второй; **C)** третий; **D)** первый и третий; **E)** все заполнятся одинаково.

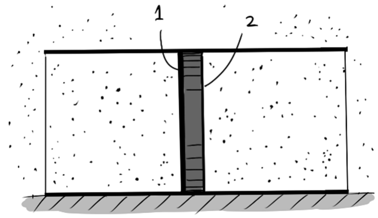
Правильный ответ: C) третий.

Решение. Количество жидкости, вытекающей из отверстия в единицу времени, зависит от разности давлений над и под отверстием. Так как вне трубы давление постоянно и равно атмосферному, то ответ будет зависеть от того, над каким из отверстий давление в жидкости больше. Для начала заметим, что после прохождения каждого их отверстий, скорость жидкости в трубе уменьшается (согласно условию задачи, она занимает все сечение трубы). К этому выводу можно прийти, следующим образом: часть жидкости вытекает, следовательно, через ту же площадь трубы за то же самое время течет меньший объем жидкости, следовательно, скорость течения жидкости по трубе уменьшается. Таким образом, при прохождении жидкостью над третьим отверстием, она имеет меньшую скорость, чем при прохождении первого и второго отверстий. Так как жидкость в трубе замедляется, то на нее справа налево должна действовать тормозящая сила ΔpS (где p — давление, S — площадь трубы), то есть давление в жидкости возрастает с уменьшением ее скорости. Это (тем, кто знает) можно доказать и с помощью уравнения Бернулли. Итак, мы получаем, что давление над третьим отверстием будет больше, чем над первыми двумя, и поэтому через него вытечет больше жидкости за то же время.

10.2. Имеется теплопроводящий цилиндр, разделенный на две равные части поршнем. Поршень может без трения перемещаться вдоль цилиндра, причем первая из его поверхностей (цифра 1 на рисунке) поглощает падающие молекулы воздуха, а вторая (цифра 2 на рисунке) — упруго отражает. Поршень отпустили.

1. В какую сторону он поедет?
2. Как изменится его движение, если поршень нагреть?

Изменением массы поршня пренебрегите.



Варианты ответа:

A) поедет вправо, ускорится; **B)** поедет вправо, замедлится; **C)** поедет вправо, не изменится; **D)** поедет влево, ускорится; **E)** поедет влево, замедлится; **F)** поедет влево, не изменится; **G)** никуда не поедет, не изменится.

Правильный ответ: D) поедет влево, ускорится.

Решение. Пусть ось X перпендикулярна поршню. При ударе слева (с поглощением) молекула передает поршню импульс mV_x; при ударе справа (упругом) — $2mV_x$. При исходно равных концентрации и средних скоростях молекул часто́ты ударов о поршень слева и справа одинаковы, но средний передаваемый импульс справа в 2 раза больше. Следовательно, поршень поедет *влево.*

Если систему подогреть, то скорости молекул и передаваемые ими импульсы возрастут, как и частоты ударов о стенку. Следовательно, все силы пропорционально возрастут и поршень в своем движении влево *ускорится.*

10.3. Гарри Поттер подошел к электрометру, стрелка которого показывала 6 делений. Гарри зарядил свою эбонитовую палочку, потерев ее о мех, и коснулся электрометра. После этого стрелка стала показывать уже 2 деления. Теперь, снова точно так же зарядив свою палочку, Гарри касается электрометра во второй раз. Какой наибольший заряд может показать электрометр? Деление, показываемое стрелкой, пропорционально общей величине заряда на электрометре, причем знак заряда прибор не различает. Считайте, что при соприкосновении весь заряд палочки переходит на электрометр. Гарри заряжает палочку электрическим зарядом (не каким-нибудь магическим!).

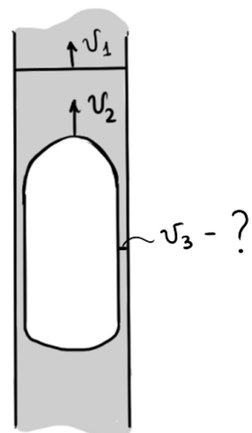
Правильный ответ: Электрометр может показать 10 делений.

Решение. Изначально стрелка электрометра показывала 6 делений. И поскольку электрометр не различает знака заряда, то нельзя сказать, отрицательный ли заряд был на электрометре, или положительный. Затем, Гарри касается палочкой электрометра, и стрелка стала показывать 2 деления. Поскольку у Гарри была эбонитовая палочка, которую он тер о мех, то палочка имеет отрицательный заряд. Поэтому, если на электрометре был заряд -6, то нельзя было бы сообщив электрометру отрицательный заряд с палочки получить 2 деления. Таким образом, на электрометре был заряд $+6$. Но тогда на палочке может быть заряд либо -4, либо -8. Оба этих случая дадут заряд либо $+2$, либо -2, что для электрометра без разницы, ведь он не различает знака заряда. Тогда, коснувшись палочкой во второй раз, мы бы получили значения либо -2, либо -10. Таким образом, мы получаем, что наибольший заряд, который может показать электрометр, соответствует 10 делениям.

10.4. В узком капилляре вверх движется поток жидкости со скоростью $v_1 = 5$ см/с. В капилляр попал достаточно большой пузырек воздуха и всплывает вверх со скоростью $v_2 = 7$ см/с. Вследствие его большого объема, он занимает 90% всего поперечного сечения капилляра и имеет форму, изображенную на рисунке.

1. Определите направление движения жидкости в тонкой пленке между пузырьком и стенкой:
  А) жидкость движется вверх;
  В) жидкость движется вниз.

2. Определите величину средней скорости v_3 движения жидкости.



Правильный ответ: $v_3 = 13$ см/с; В) направлена вниз.

Решение. Перейдем в систему отсчета потока воды (эта СО движется вверх со скоростью v_1).

В этой СО скорость пузырька $u_2 = v_2 - v_1$, а скорость воды у стенок $u_3 = v_3 - v_1$, а остальная вода неподвижна.

Пузырек за время Δt проходит путь $\Delta x_2 = u_2 \Delta t$ и вытесняет объем

$$\Delta V_{\text{пуз.}} = \Delta x_2 \cdot S_{\text{пуз.}} = \Delta x_2 \cdot 0{,}9S = 0{,}9S \cdot u_2 \Delta t.$$

Вода же у стенок бежит вниз (знак ее скорости отрицателен) и у стенок протекает ее объем

$$\Delta V_{\text{у ст.}} = \Delta x_3 \cdot S_{\text{у ст.}} = (S - S_{\text{пуз.}})(-u_3)\Delta t = -0{,}1S \cdot u_3 \Delta t.$$

Эти объемы равны (сколько вытеснил пузырь, столько и утекло вдоль стенок), то есть $\Delta V_{\text{пуз.}} = \Delta V_{\text{у ст.}}$, или

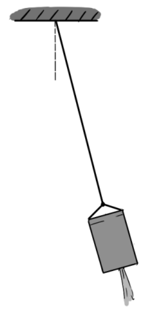
$$0{,}9S \cdot u_2 \Delta t = -0{,}1S \cdot u_3 \Delta t \Rightarrow u_3 = -9u_2 \Rightarrow v_3 - v_1 = -9(v_2 - v_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_3 = 10v_1 - 9v_2 = 10 \cdot 5 - 9 \cdot 7 = -13\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

10.5. Бочка, доверху заполненная водой, подвешена на длинной веревке и совершает малые колебания относительно положения равновесия. В дне бочки проделано небольшое отверстие, через которое вытекает вода. Через некоторое время вся вода из бочки вытекла.

Как изменялся период колебаний бочки по мере вытекания воды? Считайте, что колебания малой амплитуды происходят все время, пока жидкость вытекает.

Варианты ответа:

A) все время уменьшался; **B)** все время увеличивался; **C)** сначала увеличивался, затем уменьшался; **D)** сначала уменьшался, затем увеличивался; **E)** не изменялся.



Правильный ответ: C) сначала увеличивался, затем уменьшался.

Решение. Будем рассматривать бочку, как математический маятник, совершающий малые колебания относительно своего положения равновесия. Как известно, период колебаний такого маятника определяется согласно формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где, в данном случае, l — это расстояние от точки подвеса до **центра масс** бочки с водой (которая находится внутри бочки), g — ускорение свободного падения.

Несложными рассуждениями можно показать, что по мере вытекания воды из бочки величина l сначала увеличивается, а затем уменьшается. Предположим, что масса бочки мала по сравнению с массой жидкости внутри нее. Изначально центр масс был сосредоточен в середине бочки. По мере вытекания воды, ее уровень в бочке уменьшается, и, следовательно, понижается и центр масс (l растет). Когда вся жидкость вытечет, центр масс оставшейся пустой бочки снова будет в середине. Такие же рассуждения годятся для любого соотношения масс бочки и воды в ней (даже в случае, когда масса бочки много больше массы воды в ней, просто смещение центра масс будет небольшим). Таким образом, в процессе вытекания воды, l сначала увеличивалось, а затем уменьшалось до своего исходного значения.

10.6. Два жука массой m находятся в противоположных концах стеклянной трубки, которая лежит на гладком столе. Второй жук, который справа, несет на себе 3 грузика массой m каждый. В некоторый момент они начали движение навстречу друг другу. Когда они встретились, второй жук отдает два грузика первому жуку, после чего их движение продолжается, пока они не достигнут противоположных концов трубки. Определите путь L, который прошел первый жук относительно стола. Масса стеклянной трубки равна $2m$, а длина $l = 7$ см.

Правильный ответ: $L = 8$ см.

Решение. На пробирку с жуками не действуют внешние силы в горизонтальном направлении. Отсюда следует, что по горизонтали положение центра масс остается неизменным.

Вычислим положение центра масс в начальный момент времени:

$$x_c = \frac{m \cdot 0 + 4ml + 2m \cdot (\frac{l}{2})}{m + 4m + 2m} = \frac{5}{7}l.$$

Далее жуки внутри пробирки начинают движение, при этом перенося грузики. Отметим, что абсолютно неважно, как они там перемещались и с какой скоростью. Нас интересует только конечное распределение масс. В итоге жуки снова окажутся в концах пробирки, однако сама пробирка сместится так, чтобы центр масс x_c остался тем же. Обозначив за x положение центра масс пробирки, имеем

$$x_c = \frac{2m \cdot (x - \frac{l}{2}) + 3m \cdot (x + \frac{l}{2}) + 2mx}{m + 4m + 2m} = x + \frac{l}{14}.$$

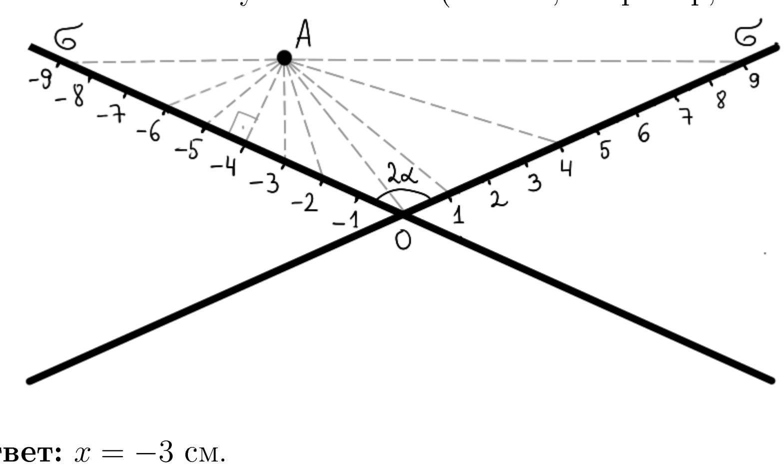
Сравнивая с предыдущим выражением, находим, что $x = 9l/14$, откуда путь, который прошел первый жук:

$$L = \left(x + \frac{l}{2}\right) - 0 = \frac{8l}{7}.$$

Подставляя сюда $l = 7$ см, найдем, что $L = 8$ см.

10.7. Имеются две равномерно заряженные диэлектрические бесконечные плоскости, пересекающиеся под углом 2α (см. рисунок). Частицу с положительным зарядом q отпустили из точки A с нулевой начальной скоростью. Плоскости имеют отрицательный поверхностный заряд σ. Вся система находится в невесомости, сила тяжести отсутствует. В точку с какой координатой x попадет шарик?

Приблизительные координаты некоторых точек попадания на рисунке отмечены в сантиметрах; свой ответ записывайте с учетом знака (то есть, например, 8 или 0, но -5).

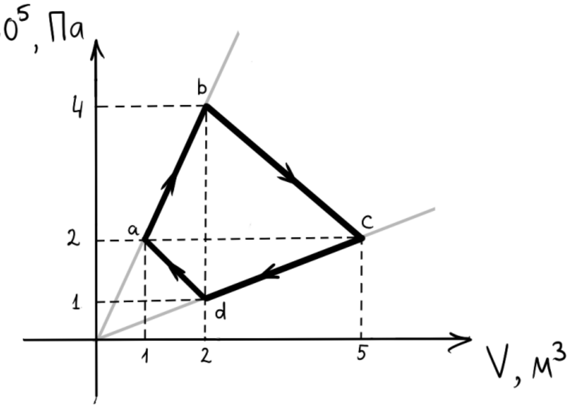


Правильный ответ: $x = -3$ см.

Решение. Две плоскости с равной плотностью заряда σ создают одинаковые поля, каждое перпендикулярное своей плоскости и направленное к ней (так как $\sigma < 0$).

Сумма этих полей дает поле, направленное вниз, следовательно и заряд будет ускоряться вниз и попадет в точку с координатой -3.

10.8. Идеальный газ совершает цикл $abcd$, изображенный на рисунке. Найдите работу A, совершенную газом за цикл. Ответ дайте в КДж.

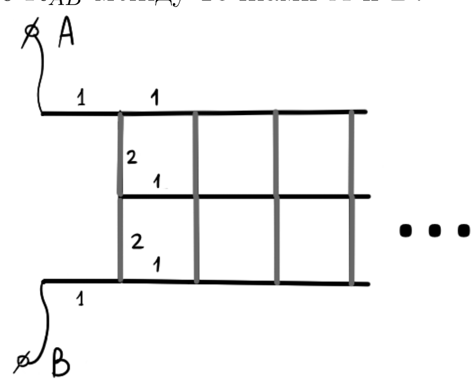


Правильный ответ: $A = 600$ КДж.

Решение. Нужно просто посчитать площадь фигуры $abcd$.

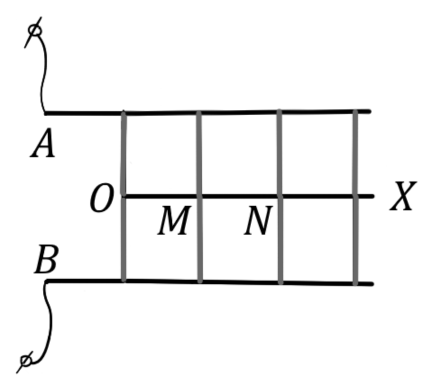
Вообще, если дан какой-то процесс, изображенный на $p - V$ диаграмме, то работа, совершенная газом в этом процессе, определяется площадью под графиком: со знаком плюс, если объем газа в процессе увеличивается, и со знаком минус, если наоборот.

10.9. Дана бесконечная проводящая сетка. Считая, что сопротивление каждого ребра сетки, покрашенного в черный цвет, равно 1 Ом, а ребра, покрашенного в серый цвет, равно 2 Ом, найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B.

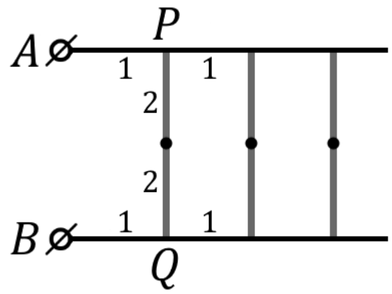


Правильный ответ: $R_{AB} = 4$ Ом.

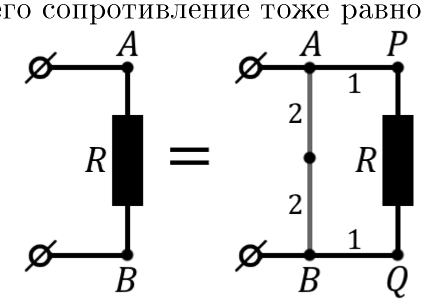
Решение.



Заметим, что из симметрии потенциалы всех точек линии OX — одинаковы (и равны среднеарифметическому потенциалов точек A и B). Поэтому разность потенциалов между точками O и N, N и M и так далее равна нулю и ток по этим ребрам не идет (то есть, их можно удалить). Получаем схему:



Пусть сопротивление между точками A и B $R_{AB} = R$; но тогда участок справа от PQ повторяет всю схему, то есть его сопротивление тоже равно R. Получается:



то есть

$$R = \frac{4(R+2)}{4+(R+2)}.$$

Решая, находим $R = 2$ Ом.

10.10. Пробковый шарик диаметра 1 см, всплывая с большой глубины озера, подскакивает над поверхностью воды на $h = 2{,}5$ см. На какую высоту H подскочит шарик из такой же пробки, но диаметром 2 см? Пробку считайте несжимаемой, сила сопротивления воды прямопропорциональна произведению скорости шарика на его радиус, сопротивление же воздуха в задаче несущественно.

Замечание: считайте, что высота подъема шарика равна высоте подъема его центра; эффекты смачивания не учитывайте.

Правильный ответ: $H = 40$ см.

Решение. Высота подскока шарика $h = V^2/2g$, где V — набранная шариком в воде скорость.

Скорость набирается до тех пор, пока сила сопротивления не уравняется с подъемной силой:

$$F_{\text{сопр}} = F_{\text{под}} = F_{\text{Арх}} - F_{\text{тяж}}.$$

По условию $F_{\text{сопр}} \sim R$ и V, то есть $F_{\text{сопр}} = kRV$, где k — некоторый коэффициент:

$$kRV = \rho_{\text{в}} Vg - mg = \rho_{\text{в}} Vg - \rho_{\text{ш}} Vg.$$

При увеличении диаметра в 2 раза объем увеличится в $2^3 = 8$ раз, то есть в уравнении левая часть (за счет радиуса) возросла в 2 раза, а правая — (за счет объема) в 8 раз. Значит, набираемая скорость должна возрасти в 4 раза, поэтому:

$$H = \frac{(4V)^2}{2g} = 16\frac{V^2}{2g} = 16h = 40 \text{ сантиметров.}$$