Problema 1

Lo primero que haremos es ver qué cubos pueden ser construidos como el producto de 3 elementos distintos de $\{1, 2, \ldots, 12\}$. Esto es bastante fácil de verificar a mano, y nos entrega:

$$8 = 1 \times 2 \times 4.$$
$$27 = 1 \times 3 \times 9$$
$$64 = 2 \times 4 \times 8$$
$$216 = 2 \times 9 \times 12 = 3 \times 6 \times 12 = 3 \times 8 \times 9 = 4 \times 6 \times 9.$$

Ahora debemos seleccionar elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 12\}$ tales que por lo menos uno de ellos aparezca en cada una de las construcciones.* Es evidente que no podemos seleccionar solo un elemento ($1 \times 2 \times 4$ y $3 \times 6 \times 12$ no tienen elementos en común). Para ver si se pueden quitar 2, podemos, por cada elemento del conjunto, quitarlo y ver si todas las construcciones restantes tienen un elemento en común. Después de hacer esto nos damos cuenta de que no es suficiente el quitar 2 elementos. En cambio, el quitar 3 elementos sí funciona, un ejemplo siendo si quitamos 4, 6, y 9.

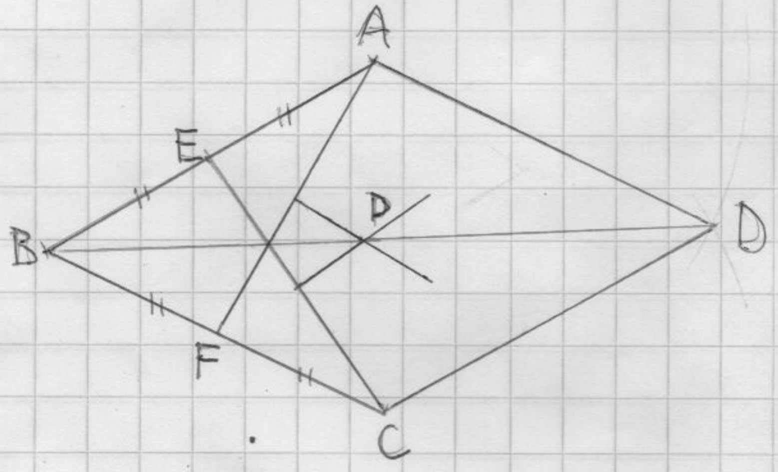
Por lo tanto, el máximo de elementos que puede tener el subconjunto A es 9, siendo un ejemplo

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 12\}.$$ (quitamos el 4, el 6, y el 9).

* de esta forma, si quitamos estos elementos del conjunto, ya no nos será posible armar ningún cubo.

Problema 2

Siendo ABCD un rombo, A es simétrico a C respecto a BD. Por lo tanto, AB es simétrico a CB respecto a CD. Por lo tanto, E es simétrico a F con respecto a CD. Por lo tanto, la mediatriz de AF es simétrica a la mediatriz de CE respecto a BD. Estas dos últimas se intersectan en el punto P, que, por simetría, debe estar situado en la recta BD.



~~Nota:~~
~~En el enunciado traducido que recibí~~

Problema 3

Debemos encontrar el mínimo valor positivo de la expresión

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)$$

dónde x, y, z son números reales no nulos.

Si desarrollamos esta expresión, nos resulta

$$3+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}.$$

Podemos reordenarla de esta manera:

$$3+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\right).$$

Las 3 sumas entre paréntesis son de la forma $\left(a+\frac{1}{a}\right)$. Es bien sabido que con a real no nulo se cumple la siguiente desigualdad:

$$a+\frac{1}{a} \geq 2.$$

Por lo tanto, con la expresión anterior tenemos

$$3+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\right) \geq 9.$$

Tenemos una cota mínima.

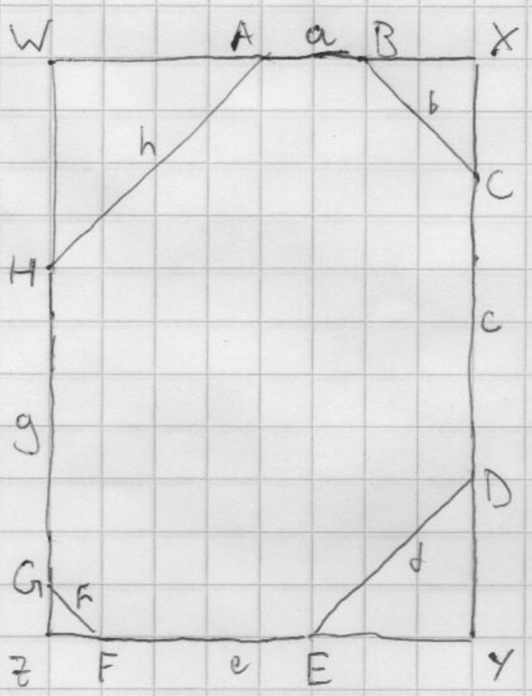
Y por último, si reemplazamos $x=y=z$, nos queda:

$$3+2+2+2=9.$$

Por lo tanto, el mínimo valor que puede tomar esta expresión es $\boxed{9}$.

Problema 4

El octágono, al tener todos sus ángulos iguales, debe tener ángulos de 135 grados. Por lo tanto, podemos rodearlo de un rectángulo de esta forma:



a, b, c, d, e, f, g, h son todos racionales.

Ahora, para probar que el octágono ABCDEFGH tiene un centro de simetría, nos basta con probar que sus lados opuestos tienen la misma medida*. Probemos, por ejemplo, que los lados a y e tienen misma medida.

$$a + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{h}{\sqrt{2}} = WX = ZY = e + \frac{f}{\sqrt{2}} + \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow \quad a + \frac{b+h}{\sqrt{2}} = e + \frac{f+d}{\sqrt{2}}.$$

Cada una de estas expresiones tiene dos partes. La primera es un racional, y la segunda es un ~~irr~~ racional multiplicado por un irracional $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Problema 4

No es posible separar $e+\frac{F+d}{\sqrt{2}} = e + \frac{u}{\sqrt{2}} + v$, con u, v racionales (no nulos), ya que esto implicaría que:

$$\frac{F+d}{\sqrt{2}} = \frac{u+\sqrt{2}v}{\sqrt{2}},$$

lo cuál a su vez implicaría que $\sqrt{2}v$ es racional, lo cuál implicaría que v es irracional, contradiciendo lo dicho anteriormente.
En otras palabras, no es posible reescribir $e+\frac{F+d}{\sqrt{2}}$ como otra suma de un racional y otro racional dividido por $\sqrt{2}$. Esto implica que no se puede reescribir (de manera diferente) $e+\frac{F+d}{\sqrt{2}}$ como ~~a+bh~~ $a+\frac{b+h}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto la forma debe permanecer intacta, es decir $a=e$. (y $F+d=b+h$)
Análogamente, y tal vez usando rectángulos distintos, es posible probar que $b=F$, $c=g$, $d=h$. Lo cual implica que el octágono ABCDEFGH tiene un centro de simetría.*

~~* Para probar esto, basta ver que los cuadriláteros ABCD y EFGH son congruentes~~

* Para probar esto, basta ver que los pentágonos ABCDE y EFGHA son congruentes, y simétricos respecto al punto medio de AE.

Problema 4

Esto es verdad ya que los dos pentágonos tienen los lados correspondientes de mismo largo, y los ángulos correspondientes de misma medida:

$AB = EF$
$BC = FG$
$CD = GH$
$DE = HA$
$EA = AE$

$\measuredangle ABC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDE = \measuredangle EFG = \measuredangle FGH = \measuredangle GHA = 135^\circ$.

$\measuredangle DEA = 135^\circ - \measuredangle AEF = \measuredangle HAE$

$\measuredangle EAB = 135^\circ - \measuredangle HAE = \measuredangle AEF$.

~~Los pentágonos siendo simétricos respecto a un punto implica que ela a figura formada por ambos (en este caso, el octágono ABCDEFGH) es también simétrico respecto a este punto.~~

Los pentágonos ABCDE y EFGHA siendo simétricos el uno al otro respecto a un punto implica que la figura formada por ambos (en este caso, el octágono ABCDEFGH) es ~~tam~~ simétrico ~~respecto~~ a sí mismo respecto a ese mismo punto. Y ese punto es el centro de simetría.

(Todos los puntos del octágono pertenecen a un pentágono, y tienen un punto simétrico en el otro pentágono, que es también parte del octágono).

Problema 5

Hay dos formas de interpretar este enunciado:

- Caso A: los enteros positivos pueden repetirse
- Caso B: los enteros positivos NO pueden repetirse.

Resolveremos ambos casos.

Para ambos casos, es fácil notar que la apariencia general del tablero debería presentar una alternancia al estilo tablero de ajedrez entre números menores que todos sus vecinos, y números mayores que todos sus vecinos. Esto se debe a que, si un~~a~~ ~~dos~~ número es menor que todos los adyacentes, estos números adyacentes serán o ~~$~~ mayores que todos los números adyacentes, o una de las dos excepciones.

Sin pérdida de generalidad, si asumimos que una de las excepciones va en lugar de una casilla que debería ser ~~menor~~ menor que todas sus vecinas, debe ser mayor que al menos una vecina. Esa vecina ocupa el lugar de una casilla que debería ser mayor que todas sus vecinas, pero es menor que una vecina: la primera excepción. Por lo tanto ambas excepciones deben ser adyacentes (o vecinas).

Análogamente, comenzando con una excepción que ocupa una casilla que debe ser mayor que todas las adyacentes, llegaremos a la misma conclusión de que ambas excepciones deben ser vecinas.

Problema 5

Caso A: Los enteros positivos pueden repetirse.

Primero, llenamos alternadamente las casillas con 1 (el menor entero positivo) y con 10 (un entero positivo suficientemente grande como para que no sea una molestia en el proceso). Ahora, las 2 casillas que queremos hacer una excep-ción están dispuestas de esta forma:

1	10	1	10	1
10	1	10	1	10
1	10	1	10	1
10	1	10	1	10

Nota: que las casillas estén en el borde del tablero o no no es relevante, el resultado será el mismo.

Queremos reemplazar estas dos casillas por números que cumplan las siguientes condiciones: ~~el~~

- el que ocupa el lugar del 1 debe ser menor a 10
- el que ocupa el lugar del 10 debe ser mayor a 1 pero no mayor que el que ocupa el lugar del 1.

Los enteros positivos que cumplen esto con la menor suma son 2 y 2:

1	10	1	10	1
10	2	2	1	10
1	10	1	10	1
10	1	10	1	10

Esta disposición cumple lo requerido y deja la menor suma para el caso A en $\boxed{4}$.

Problema 5

Caso B: los enteros positivos NO pueden repetirse.

Al igual que en el caso A, comenzaremos llenando el tablero alternadamente (como un tablero de ajedrez) con números "bajos" y números "altos". Para no tener problemas, pondremos todos los números bajos entre 100 y 200, y todos los números altos entre 300 y 400. De esta forma, nos aseguramos que todos los números altos son mayores que todos los números bajos. Ahora, si ~~está~~ la excepción localizada en lugar de un número "alto" no está en el borde del tablero, tendrá que ser mayor que 3 casillas vecinas, y su valor mínimo será 4* (podemos bajar las 3 casillas vecinas a los valores 1, 2, 3, ya que estos no están siendo utilizados. En cambio, si esta excepción está en un borde, una de estas dos situaciones ocurrirá

−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−

(Nota: aquí los "+" representan los números "altos", y los "−" los números "bajos")

* lo cual nos daría como valor mínimo de la otra excepción 5, y valor mínimo de la suma total 9, lo cual es mayor que el 7 encontrado de la otra forma

Problema 5

Minimizando el valor de ambas excepciones en cada caso, llegaremos a las situaciones:

1	3	4	+	-
+	2	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+
·	·	·	·	·

+	1	3	2	+
-	+	4	+	-
+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
·	·	·	·	·

En ambas debemos usar el 1 y el 2 como ~~casillas "bajas"~~, ~~o~~ números "bajos" en vez de poder usarlos como excepciones* por lo tanto el menor valor posible para el Caso B es $\boxed{7}$ (estas disposiciones cumplen los requisitos del enunciado).

* y usamos luego como excepciones los dos enteros positivos más bajos disponibles.

Nota: En este problema nos referimos ~~usamos~~ como "números altos" a aquellos que son mayores que todos sus ~~ad~~ vecinos, y como números "bajos" a aquellos que son menores que todos sus vecinos.

Nota 2: Por "excepción" nos referimos a los números que no serán cobrados en nuestra construcción óptima que minimiza la suma de estos dos números.