① Чтобы произведение являлось точным кубом, надо чтобы при разложении этого числа на простые множители, каждый простой множитель был в степени $3k$, где $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что если в произведении будут числа 5, 7, 10, 11, то произведение не будет являться точным кубом, т.к. 7 будет в произведении в 1-ой степени, 11 тоже только в 1-ой степени, 5 максимум во 2-ой степени (если в произведении 5 и 10). Тогда, запишем все возможные 3-ки чисел, которые в произведении дают точной куб: (1, 2, 4), (1, 3, 9), (2, 4, 8), (2, 9, 12), (3, 6, 12), (3, 8, 9), (4, 6, 9). Предположим, что можно убрать 2 числа, когда не получится куб, т.е. найдутся 2 числа, которые содержатся во всех 3-ках. Таких 2-х ~~чу~~ чисел нет, т.к. каждое число повторяется в 3-ках несколько раз.

Запишем таблицу:

число	встречается раз
1	2
2	3
3	3
4	3
6	2
8	2
9	4
12	2

Тогда для 2-ух чисел их общее кол-во не менее 7, т.к. всего 7 3-ек чисел. ~~То~~ Получим, что обязательно не должно быть 9, которая повторяется 4 раза. Остаются 3-ки (1,2,4), (2,4,8), (3,6,12). Значит, понадобятся ещё хотя бы 2 числа, чтобы исчезли все 3-ки образующие куб. Значит, останется не более 9 чисел, произведение любых 3-ёх не является точным кубом. Пример: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12.

Ответ: 9

③ По неравенству Коши-Буняковского-Шварца:

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{z}{xy}+\frac{y}{xz}+\frac{x}{yz}\right)\geqslant\left(\sqrt{\frac{xyz}{zxy}}+\sqrt{\frac{zxy}{yxz}}+\sqrt{\frac{yzx}{xyz}}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{xyz}{zxy}}+\sqrt{\frac{zxy}{yxz}}+\sqrt{\frac{yzx}{xyz}}\right)^2=(1+1+1)^2=9$$

Значит,

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{z}{xy}+\frac{y}{xz}+\frac{x}{yz}\right)\geqslant 9$$

Т.е. минимальное значение равно 9.

Ответ: 9

② Дано:

$ABCD$ - ромб

$AE=EB$, $E\in AB$

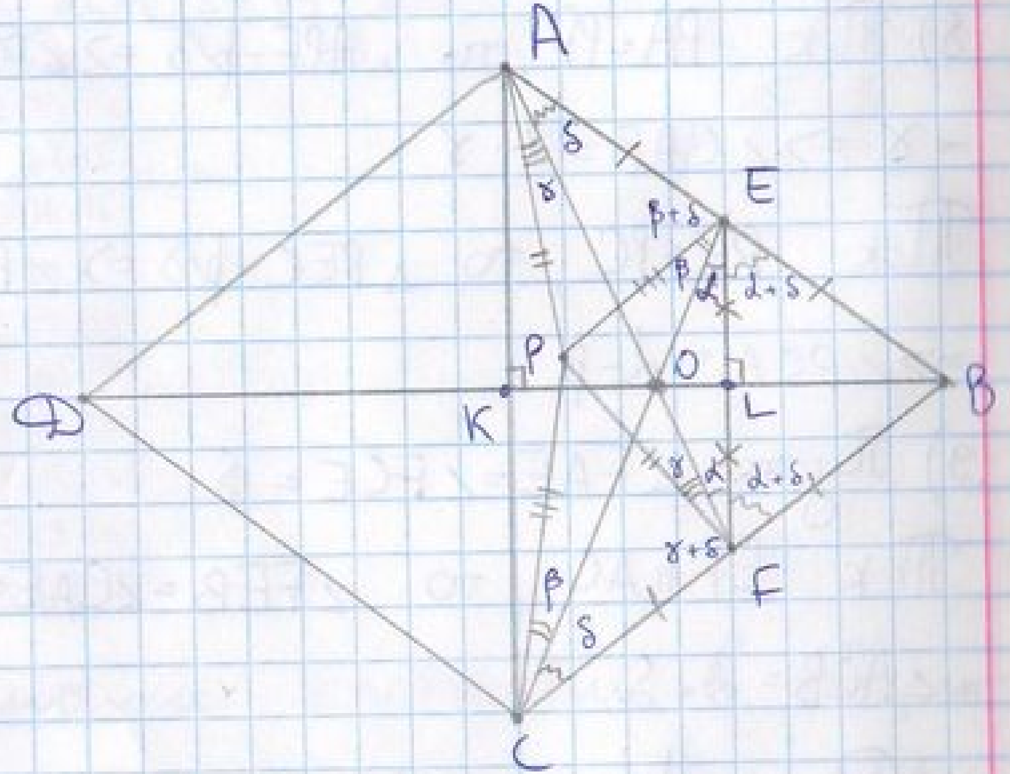
$BF=FC$, $F\in BC$

$PA=PF$

$PE=PC$

Док-ть: $P\in BD$

Док-во:



1) Т.к. ABCD – ромб, то $AB = BC \Rightarrow AE = EB = BF = FC$

2) Т.к. $AE = EB$, $BF = FC$, то EF – ср. линия $\Rightarrow EF \parallel AC$

3) Т.к. ABCD – ромб, то $AC \perp BD$, $AK = KC$.

Т.к. $EF \parallel AC$, то $\angle AKB = \angle ELB = 90^\circ$ (соответ. при $EF \parallel AC$ и сек. KL)

4) В $\triangle EBF$, $EB = BF$, $BL \perp EF \Rightarrow EL = LF$

5) Т.к. $AK = KC$, $EL = LF$, $EC \cap AF = O$, то $O \in PL$

(т.к. AEFC – трапеция; по св-ву трапеции)

6) Т.к. AEFC – трапеция, $AE = FC$, то AEFC – р/б трапеция $\Rightarrow \angle OEF = \angle OFE = \angle OAC = \angle OCA = \alpha$

7) Пусть $\angle PEC = \beta$, $\angle PFA = \gamma$

8) Т.к. $PA = PF$, то $\triangle APF$ – р/б $\Rightarrow$ ~~∠PEC=∠~~ $\angle PFA = \angle PAF = \gamma \Rightarrow \angle CAP = \alpha - \gamma$

Т.к. $PE = PC$, то $\triangle PEC$ – р/б $\Rightarrow \angle PEC = \angle PCE = \beta \Rightarrow \angle PCA = \alpha - \beta$

9) Пусть $\angle FAE = \angle FCE = \delta$

Т.к. $EF \parallel AC$, то $\angle FEB = \angle CAE = \alpha + \delta$; $\angle EFB = \angle ACB = \alpha + \delta$.

10) Рассмотрим $\triangle APE$, $\triangle PFC$

$$\left.\begin{aligned} &PE = PC \text{ (по усл)} \\ &AP = PF \text{ (по усл)} \\ &AE = FC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle APE \overset{III}{=} \triangle PFC \Rightarrow \angle AEP = \angle PCF = \beta + \delta;\ \angle PFC = \angle PAE = \gamma + \delta.$$

11) $\angle AEB = \angle CFB = 180^\circ$

$\beta + \delta + \beta + \alpha + \alpha + \delta = \gamma + \delta + \gamma + \alpha + \alpha + \delta$

$2\beta = 2\gamma$

$\beta = \gamma$

12) Т.к. $\beta = \gamma$, то $\angle PEF = \angle PFE \Rightarrow \triangle PEF$ – р/б

13) Т.к. $BL \perp EF$, $EL = LF \Rightarrow P \in LB \Rightarrow P \in BD$

Что и т.д.

5) Пример на 20 (1+19=20)

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	5	6	7	8	9	10	11	12	15
3	4	5	6	7	8	9	10	11	16
2	3	4	5	6	7	8	9	10	17
$\boxed{1}$	2	3	4	5	6	7	8	9	18
2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\boxed{19}$
3	4	5	6	7	8	9	10	11	18
4	5	6	7	8	9	10	11	12	17
5	6	7	8	9	10	11	12	13	16
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Незакрашенными клетками в таблице будут клетки с минимальном и максимальным значением. Т.к. всего незакрашенными оказались 2 клетки, то минимальное и максимальное число встречаются в таблице ровно 1 раз. Для того, чтобы выполнялось условие соседства с меньшим и большим значением, найдётся цепочка последовательных чисел от наименьшего до наибольшего. Среди всех возможных возрастающих последовательностей от наименьшего к наибольшему, последовательная (1, 2, 3, ...) по длине будет наибольшей. Самая длинная последовательность идёт по „периметру" квадрата, т.к. сторона квадрата 10~~х10~~, то получили минимальную сумму 20.

Ответ: 20 - минимальный