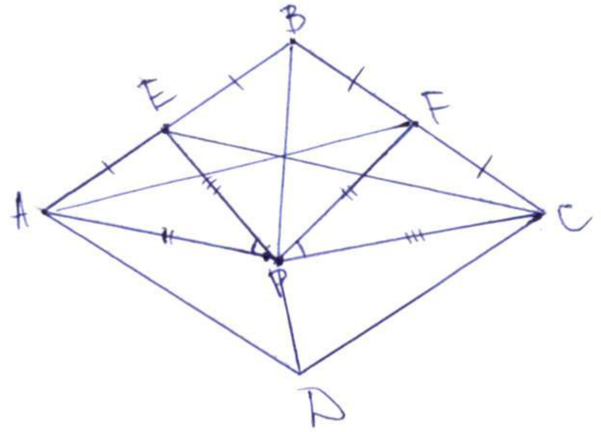
9 класс

Задача № 2:



Допустим, что P не лежит на BD, т.е. ∠BPD ≠ 180°

Соединим т.A с т.F, т.E с т.C

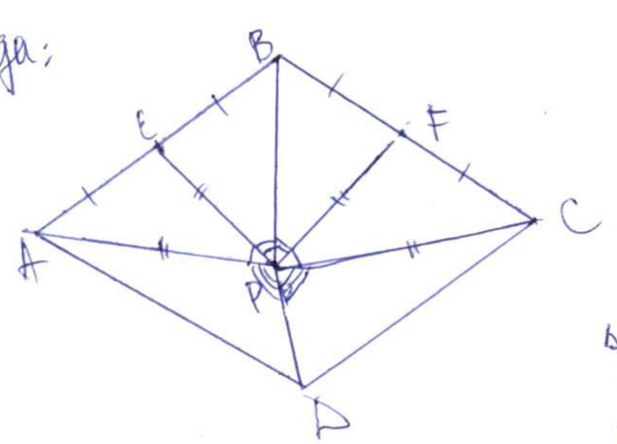
Тогда △ABF = △EBC, т.к.:
1) ∠B - общий
2) AB = BC
3) BE = BF
⇓
AF = EC

△AEP = △FPC, т.к.:
1) AP = PF
2) PE = PC } (по усл)
3) AE = FC
⇓
∠APE = ∠FPC
⇓
∠APF = ∠EPC, т.к. ∠APF = ∠APC − ∠FPC
∠EPC = ∠APC − ∠APE

Получается, что △APF ~ △EPC, т.к. они р/б тр. и ∠APF = ∠EPC
⇓
все углы при основании равны

А т.к. AF = EC, то △APF = △EPC
⇓
AP = PF = PE = PC

Тогда:



△EBP = △BPF, т.к.:
1) EB = BF
2) EP = PF
3) BP - общая
} ⇒ ∠EPB = ∠BPF

△APD = △CPD, т.к.:
1) AP = PC
2) AD = DC
3) PD - общая
} ⇒ ∠APD = ∠CPD

След., ∠EPB + ∠APE + ∠APD = ∠BPF + ∠FPC + ∠CPD
⇓
∠BPD = 180°

ч.т.д.

Задача №3:

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)$$

Раскроем скобки: $\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+1+\frac{x^2}{y^2}+1+\frac{z^2}{y^2}+1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{x^2}=$

$$=3+\frac{x^2+y^2}{z^2}+\frac{x^2+z^2}{y^2}+\frac{y^2+z^2}{x^2}$$

· Т.к. $x^2+y^2\geqslant 2xy$, то:

$\frac{x^2+y^2}{z^2}\geqslant\frac{2xy}{z^2}$, знак не меняется потому, что $z^2>0$

Так же $\frac{x^2+z^2}{y^2}\geqslant\frac{2xz}{y^2}$

$\frac{y^2+z^2}{x^2}\geqslant\frac{2yz}{x^2}$

Т.е. $\frac{x^2+y^2}{z^2}+\frac{x^2+z^2}{y^2}+\frac{y^2+z^2}{x^2}\geqslant\frac{2xy}{z^2}+\frac{2xz}{y^2}+\frac{2yz}{x^2}$

А равенство достигается только при $x=y=z$. Т.к.

$x^2+y^2=2xy$ $\qquad$ $x^2+z^2=2xz$

$(x-y)^2=0$ $\qquad$ $(x-z)^2=0$

$\Downarrow$

$x=y$ $\qquad$ $x=z$

$x=y=z$

Тогда $\frac{x^2+x^2}{x^2}+\frac{x^2+x^2}{x^2}+\frac{x^2+x^2}{x^2}=2+2+2=6$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)\geqslant 3+6=9$$

Отв: 9

Задача № 1: 9 класс,

$1=1$
$2=2$
$3=3$
$4=2^2$
$5=5$
$6=2\cdot 3$
$7=7$
$8=2^3$
$9=3^2$
$10=2\cdot 5$
$11=11$
$12=3\cdot 2^2$

Все трио чисел, которые одновременно не могут быть выбранными:

1) 1, 2, 4
2) 1, 3, 9
3) 2, 4, 8
4) 3, 8, 9
5) 4, 6, 9
6) 2, 9, 12
7) 3, 6, 12

Отв: 9

Заметим, что 3-е и 7-ое трио различны, т.е. никакие числа не повторяются.
$\Downarrow$
как минимум 2 числа не могут быть выбранными

Допустим, что не выбраны 2 и 3, но тогда есть 5-ое трио, где не входит ни 2, ни 3 $\Rightarrow$ не выбраны ≥ 3 числа.
Допустим, что не выбраны 2 и 6, но тогда есть 4-ое трио, где не входит ни 2, ни 6 $\Rightarrow$ не выбраны ≥ 3 числа
Доп., что не выбраны 2 и 12, но тогда есть 5-ое трио, где не входит ни 2, ни 12 $\Rightarrow$ не выбраны ≥ 3 числа.
Доп., что не выбраны 4 и 3, но тогда есть 6-ое трио, где не входит ни 4, ни 3 $\Rightarrow$ не выбраны ≥ 3 числа
Доп., что не выбраны 4 и 6, но тогда есть 6-ое трио, где не входит ни 4, ни 6 $\Rightarrow$ не выбраны ≥ 3 числа.
Доп., что не выбраны 4 и 12, но тогда есть 4-ое трио, где не входит ни 4, ни 12 $\Rightarrow$ не выбраны ≥ 3 числа.
Доп., что не выбраны 8 и 3, но тогда есть 6-ое трио, где не входит ни 8, ни 3 $\Rightarrow$ не выбраны ≥ 3 числа.
Доп., что не выбраны 8 и 6, но тогда есть 6-ое трио, где не входит ни 8, ни 6 $\Rightarrow$ не выбраны ≥ 3 числа.
Доп., что не выбраны 8 и 12, но тогда есть 5-ое трио, где не входит ни 8, ни 12 $\Rightarrow$ не выбраны ≥ 3 числа.
Получается, что во всех вариантах выбора чисел из третьего и седьмого трио, найдётся другое трио, в котором эти два числа не входят $\Rightarrow$ максимум могут быть выбранными 9 чисел. Пример для 9 чисел: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12

Отв: 9

Задача №5:

Эти два незакрашенных числа — это минимальное и максимальное числа. Т.к. у минимального не может быть соседа, который меньше него, а у максимального не может быть соседа, который больше него. Причем, этих чисел по одному, т.е. равных ему чисел нет, т.к. иначе незакрашенными были бы более двух клеток.

Под минимальным или максимальным я имею в виду меньше или больше, чем числа, которые находятся в этой таблице.

Очевидно, что минимальное — это 1, т.к. она наименьшая из N.

А максимальное не очевидно, но если подумать, то наименьшее значение этого максимального получится, если по вертикали идут последовательные числа, и по горизонтали тоже. Наименьшее число, которое стоит в углу — это 2, т.к. если 1, то она должна быть закрашена, но по условию этому не быть. И тогда по вертикали увеличивается до 11, а нижняя горизонталь с 11 до 19, т.е. максимальное — 19.

Пример:

2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	7	8	9	10	11	12	13	14	15
9	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10	9	10	11	12	13	14	15	16	17
11	12	13	14	15	16	17	18	19	18

$1+19=20$

Отв: 20