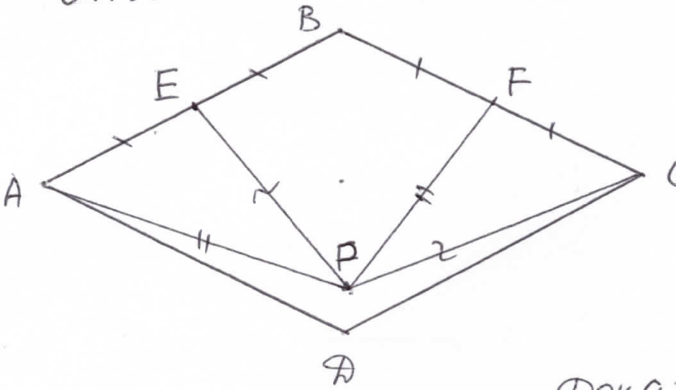
① Заметим, что если в тройку входит хотя бы одно из чисел $\{5; 7; 10; 11\}$, то произведение чисел этой тройки не может быть точным кубом. Действительно, если есть 5, то должно быть число, кратное 25 или ещё два числа, кратное 5; если есть 7, то должно быть число, кратное 49, или ещё два числа кратные 7; если есть 10, должно быть число, кратное 100, или ещё два числа, кратные 10; если есть 11, то должно быть число, кратное 121, или ещё два числа, кратные 11. Таких нет. Значит, 5; 7; 10 и 11 можно оставить.

Значит, надо понять, сколько чисел из множества $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$ можно оставить. Понятно, что одно ~~чётное число надо~~ число, равное степени двойки надо "вычеркнуть" (иначе $2 \cdot 4 \cdot 8 = 64 = 4^3$), и одно число, равное степени тройки (иначе $1 \cdot 3 \cdot 9 = 27 = 3^3$; $1 = 3^0$). А ещё необходимо вычеркнуть число, кратное трём и двум (иначе $3 \cdot 6 \cdot 12 = 2 \cdot 9 \cdot 12 = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 6^3$). Значит, из них необходимо вычеркнуть хотя бы 3 числа $\rightarrow$ останется 9 чисел всего, например, для $(1; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12)$ всё верно

Ответ: 9 чисел.

②



Дано: $ABCD$ — ромб; $E \in AB$; $AE = BE$; $F \in BC$, $BF = CF$; точка P, такая, что $PA = PF$; $PE = PC$

Доказать: $P \in BD$

Доказательство:

1) Т.к. $ABCD$ — ромб, т.е. $AB = BC$, то $AE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC = CF$

2) $\left.\begin{array}{l} 1.\ AE = FC \\ 2.\ EP = CP \\ 3.\ PA = PF \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AEP = \triangle FCP$ по трём сторонам

$\Downarrow$

3) высота из P к AE равна высоте из P к FC, т.е. точка P равноудалена от прямых AB и BC. Значит, P лежит на бис-се $\angle ABC$.

4) По свойству ромба BD — биссектриса $\angle ABC$

$\Downarrow$

$P \in BD$, что и требовалось доказать

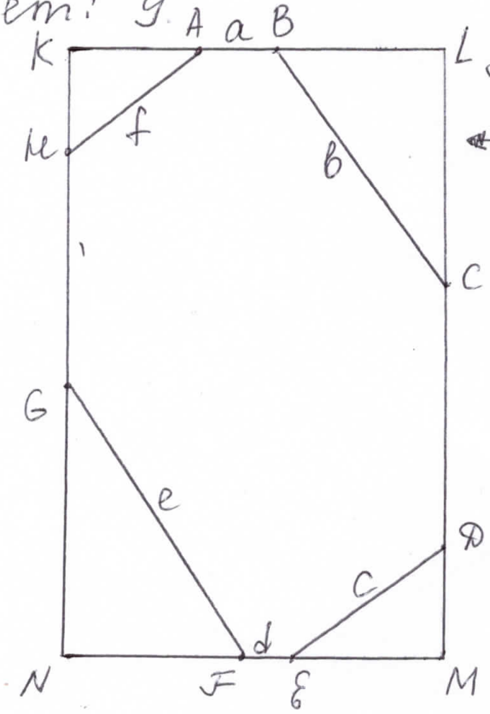
③ $$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)=\frac{xy\cdot x}{z\cdot yz}+\frac{xy\cdot y}{z\cdot zx}+\frac{xy\cdot z}{z\cdot xy}+$$
$$+\frac{zx\cdot x}{y\cdot yz}+\frac{zx\cdot y}{y\cdot zx}+\frac{zx\cdot z}{y\cdot xy}+\frac{yz\cdot x}{x\cdot yz}+\frac{yz\cdot y}{x\cdot zx}+\frac{yz\cdot z}{x\cdot xy}=$$
$$=\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+3=\frac{x^2}{z^2}-2+\frac{z^2}{x^2}+$$
$$+\frac{y^2}{x^2}-2+\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{z^2}\cancel{+\left(\frac{x}{z}-\frac{z}{x}\right)^2+}+6+3=$$
$$=\left(\frac{x}{z}-\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{y}-\frac{y}{z}\right)^2+9\geq 0+9=9.$$

Т.к. $a^2\geq 0$, то

При $x=y=z=1$ выражение равно 9.

Ответ: 9.

④



Поймем, что восьмиугольник выглядит так (ABCDEFGH). Каждый угол равен 135°. Противоположные стороны параллельны.

Продлив стороны AB; CD; EF; GH получим прямоугольник KLMN.

$\angle KAH=180^\circ-135^\circ=45^\circ$; $\angle KHA=180^\circ-135^\circ=45^\circ \rightarrow \angle K=90^\circ$. Аналогично для ΔBLC; ΔDME; ΔFNG.

Пусть $AB=a$; $BC=b$; $DE=c$; $EF=d$; $FG=e$; $HA=f$.

Тогда из ΔBCL $BL=b\cdot\sin 45^\circ=\frac{b}{\sqrt2}$.

Аналогично $EM=c\cdot\sin 45^\circ=\frac{c}{\sqrt2}$; $FN=\frac{e}{\sqrt2}$; $AK=\frac{f}{\sqrt2}$.

$KL=NM$

$$\frac{f}{\sqrt2}+a+\frac{b}{\sqrt2}=\frac{c}{\sqrt2}+d+\frac{e}{\sqrt2}$$

$$(a-d)\sqrt2=c+e-b-f$$

Т.к. длины сторон являются рациональными числами, то $a-d=0 \rightarrow a=d$. Аналогично ост. пары сторон. Получим, что $AB=EF$; $BC=FG$; $CD=GH$; $DE=HA$.

$\Downarrow$

ABEF − параллелограмм ($AB\parallel FE$; $AB=FE$) $\rightarrow$ AE пересекается с BF в точке O: $AO=OE$; $BO=OF$.

BCFG − параллелограмм $\rightarrow$ CG проходит через O; $CO=OG$

CDGH − параллелограмм $\rightarrow$ DH проходит через O; $DO=OH$

$\Downarrow$

O − центр симметрии ABCDEFGH