№ 1

(в метрах)

Обозначим стороны пруда a и b. После первого дня незамёрзшая часть будет иметь вид прямоугольника со сторонами $a-20$ на $b-20$ (минус 20, а не минус 10 т.к. пруд замерзает с обеих сторон), после второго — $a-40$ на $b-40$ (пруд не замёрзнет за это время полностью, т.к. за первые 2 дня замёрзло меньше 100% => $a>40$, $b>40$)

$ab-(a-20)(b-20)=ab-ab+20(a+b)-400=20(a+b)-400=0{,}202ab$

$(a-20)(b-20)-(a-40)(b-40)=ab-20(a+b)+400-ab+40(a+b)-1600=20(a+b)-\overset{1200}{1600}=0{,}186ab$

$$\begin{cases}20(a+b)-400=0{,}202ab\\20(a+b)-1200=0{,}186ab\end{cases}$$

$800=0{,}016ab \Rightarrow ab=50000,\quad a+b=525$

$a(525-a)=50000$

$-a^2+525a-50000=0 \Rightarrow a=\dfrac{525\pm\sqrt{525^2-4\cdot50000}}{2}=\dfrac{525\pm275}{2}$

$\cancel{a_1=250,\ b_1=300}$ $\quad a_1=125,\ b_1=400$

$\cancel{a_2=300,\ b_2=250}$ $\quad a_2=400,\ b_2=125$

Итак, стороны пруда — $125м \times 400м$ => пруд полностью покроется льдом за $\left[\frac{125}{20}\right]+1$ $(125/20)$, т.е. за 7 дней

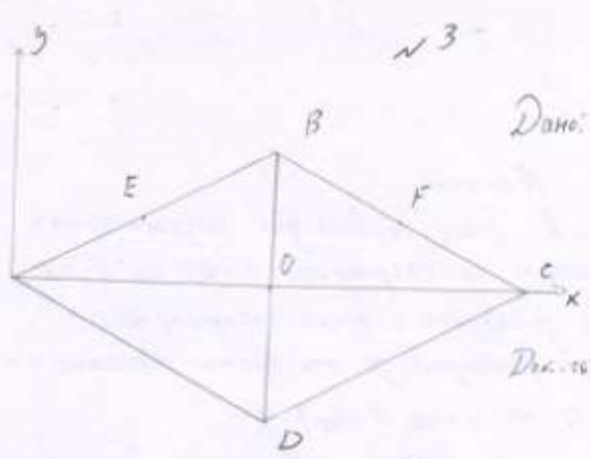
Ответ: 7 дней

№ 2

	Есть острый угол	Есть равные стороны	Есть прямой угол	Есть параллельные стороны или угол 60°
Прямоугольный равнобедренный треуг.	1	1	1	0
Правильный 3-угольник	1	1	0	1
Неравнобедренная прямоугольная трапеция	1	0	1	1
Квадрат	0	1	1	1

(Извините за бред в 4-м столбце, просто задание какое-то бредовое само)

№ 3



Дано: ABCD - ромб
E - середина AB
F - середина BC
PA = PF
PE = PC
Док-ть $P \in BD$

Решение:

Направим ось x вдоль прямой AC, ось y перпендикулярно оси x, начало координат — точка A. Обозначим ~~координату~~ абсциссу точки $O = AC \cap BD$ через a, ординату B - через в, тогда

$A = (0; 0)$, $F = (1{,}5a; 0{,}5b)$, $E = (0{,}5a; 0{,}5b)$, $C = (2a, 0)$

Запишем условия PA = PF и PE = PC, обозначив $P = (x_p; y_p)$

$$\begin{cases} x_p^2 + y_p^2 = (1{,}5a - x_p)^2 + (0{,}5b - y_p)^2 \\ (2a - x_p)^2 + y_p^2 = (0{,}5a - x_p)^2 + (0{,}5b - y_p)^2 \end{cases}$$

$x_p^2 - (2a - x_p)^2 = (1{,}5a - x_p)^2 - (0{,}5a - x_p)^2$

$4ax_p - 4a^2 = 2a^2 - 2ax_p \Rightarrow a = x_p$

Т.к. прямая BD задаётся уравнением $x = a$, то $P \in BD$

№ 4

Очевидно, что минимальное и максимальное число останутся незакрашенными, а т.к. остались незакрашенными только 2 клетки, то в этих клетках минимальное и максимальное число.

Докажем единственность минимального и максимального чисел в таблице (я имею в виду, что они ~~записываются~~ встречаются в таблице единожды)

Допустим, что у нас есть 2 клетки с максимальными числами, тогда они обе не закрашены. Но ведь у нас есть и минимальное число (т.к. мн-во конечно) к-рое тоже будет не закрашено ⇒ хотя бы 3 клетки не закрашены ⇒ противоречие и у нас только один раз встречается максимальное число (отметим, что min не совпадает с max, иначе все числа равны и все клетки не закрашены)

Единственность min значения док-ся аналогично

Будем называть путём из A в B такой маршрут, к-рый начинается в ~~точке~~ клетке A и заканчивается в клетке B, проходя через клетки так, что в каждой следующей клетке число больше, чем в предыдущей клетке маршрута.

Главным путём назовём путь из клетки m с минимальным числом в клетку M с максимальным числом.

Покажем, что через любую точку A проходит хотя бы один главный путь. Будем переходить из клетки A в соседнюю клетку с большим числом, если клетка A закрашена (если кл. A ~~не закрашена~~, то A содержит наиб. или наим. число и очевидно, что через неё проходит главный путь), и будем переходить из клетки в клетку с большим числом, пока не попадём в незакрашенную клетку. Очевидно, что эта конечная клетка — клетка M с наибольшим числом. Таким образом получим путь из A в M. Будем переходить из точки A в клетку с меньшим числом и продолжать эту операцию, пока не попадём в клетку m. Возвращаясь из m в A, получаем путь из m в A. Таким образом, существует путь из m в M через A.

Длиной пути будем называть кол-во переходов из клетки в клетку на этом пути (например, длина пути в соседнюю клетку равна 1)

Очевидно, что числа в клетках A и B отличаются хотя бы на длину максимального (наиболее длинного) пути из A в B

~~Поделим всю таблицу на 4 подтаблицы 5×5~~

Пронумеруем столбцы слева направо от 1 до 10 и строки ~~сверху вн~~ снизу вверх от 1 до 10. Номер столбца клетки A будем обозначать x_A, номер строки — y_A.

Понятно, что длина наименьшего пути AB равна $|x_B-x_A|+|y_B-y_A|$, другими словами, длина любого пути AB не меньше $|x_B-x_A|+|y_B-y_A|$

Давайте наконец сделаем оценку длины максимального главного пути.

1) Рассмотрим главный путь через клетку $(1;1)$ (он сущ-ет, т.к. через любую клетку проходит хоть один главный путь)

$l_1=|x_m-1|+|y_m-1|+|x_M-1|+|y_M-1|=x_m+y_m+x_M+y_M-4$

2) Рассмотрим главный путь через клетку $(10;10)$

$l_2=|10-x_m|+|10-y_m|+|10-x_M|+|10-y_M|=40-x_m-y_m-x_M-y_M$

$l_1+l_2=36 \Rightarrow$ длина одного из этих путей хотя бы $18 \Rightarrow M-m\geq 18$, а т.к. $m\in\mathbb{N}$, то $m\geq 1 \Rightarrow M\geq 19$ и $m+M\geq 20$

Приведём пример, когда $m+M=20$ (переверните лист)

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ответ: 20