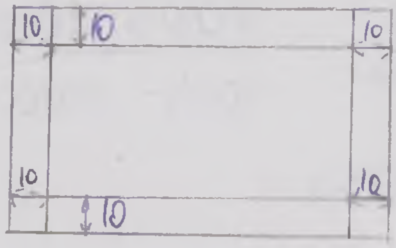
№1.

Пусть a – ширина пруда.

b – длина пруда.



Тогда ab – площадь.

Площадь „рамок" пруда толщиной 10 м:

1 день: $10\cdot a\cdot 2 + 2\cdot 10(b-20) = 0{,}202\cdot ab$

Дальше – останется без этих „рамок" незамёрзшая часть пруда со сторонами $a-20$; $b-20$.

2 день:

$$10\cdot(a-20)\cdot 2 + 10\cdot 2\cdot(b-40) = 0{,}186\cdot ab.$$

$$\begin{cases} 10\cdot a\cdot 2 + 2\cdot 10\cdot(b-20) = 0{,}202ab \quad |:20 \\ 10\cdot(a-20)\cdot 2 + 10\cdot 2(b-40) = 0{,}186ab \quad |:20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b - 20 = 0{,}0101\,ab \Rightarrow a = \dfrac{b-20}{0{,}0101b-1}. \\ \cancel{10\cdot\left(\dfrac{b-20}{0{,}0101b-1} - 20\right)\cdot 2 + 10\cdot 2\,(b-40) = 0{,}186\dfrac{(b-20)}{0{,}0101b-1}\cdot b \quad |\cdot(0{,}0101b-1).} \\ a - 20 + b - 40 = 0{,}0093\,ab. \end{cases}$$

$$\frac{b-20}{0{,}0101b-1} + b - 60 = 0{,}0093\,\frac{(b-20)}{0{,}0101b-1}\cdot b \quad |\cdot(0{,}0101b-1).$$

$$b - 20 + (b-60)(0{,}0101b-1) = 0{,}0093(b-20)\cdot b. \quad |\cdot 10000.$$

$$\cancel{b-20}\ \cancel{10000b} - 200000 + 101b^2 - 6060b - \cancel{10000b} + 600000 = 93b^2 - 1860b.$$

$$101b^2 - 6060b + 400000 = 93b^2 - 1860b.$$

$$8b^2 - 4200b + 400000 = 0 \quad |:8.$$

$$b^2 - 525b + 50000 = 0.$$

$$D = 525^2 - 200000 = 75625 = 25^2\cdot 11^2 = (275)^2.$$

$$b_1 = \frac{525-275}{2} = 125\,(м). \qquad b_2 = \frac{525+275}{2} = 400\,(м).$$

1) $b = 125$ м.

$$a = \frac{b-20}{0{,}0101b-1} = \frac{10000b - 200000}{101b - 10000} = 400 \text{ м}.$$

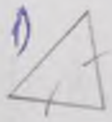
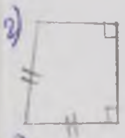
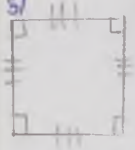
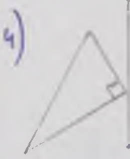
2) $b = 400$ м.

$$a = \frac{b-20}{0{,}0101b-1} = \frac{10000b-200000}{101b-10000} = 125 \text{ м}.$$

$S_{\text{в любом случае}} = 125 \cdot 400 = 50000 \text{ м}^2$, и размеры пруда в любом случае 125×400. $125 < 400$, 125 м (с обеих сторон) замерзнёт ~~за~~ на $\frac{125}{2} = 62{,}5$; $60 < 62{,}5 < 70$; $\frac{70}{10} = 7$ день.

Ответ: на 7 день.

№2

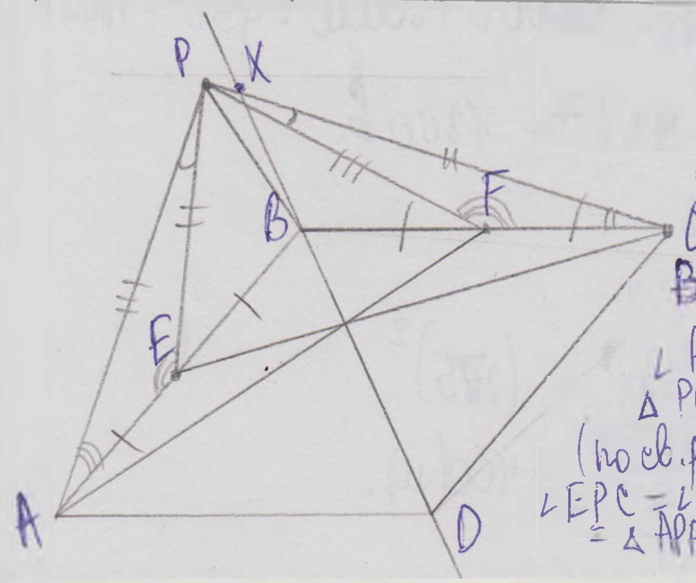
	отсутствие тупого угла	Есть прямой угол	Есть острый угол	Есть равные стороны
1) 	1	0	1	1
2) 	0	1	1	1
3) 	1	1	0	1
4) 	1	1	1	0

Фигура 1 – ~~не прям~~ остроугольный равнобедренный треугольник.

Фигура 2 – прямоугольная трапеция. (равные стороны отмечены на рисунке)

Фигура 3 – квадрат.

Фигура 4 – разносторонний прямоугольный треугольник.



№3. Решение.

~~Δ P~~ $AB = BC$ (▱ABCD – ромб, по опр.) =>

=> $FC = AE$ (как $\frac{1}{2}$ равных AB и BC) =>

=> $\Delta PFC = \Delta PAE$ (по III пр.) => $\angle APE = \angle CPF$.

~~$BF = BE$ (как $\frac{1}{2}$ AB и BC) => $\Delta PBF = \Delta PBE$ (по II~~

$\angle PFC = \angle PAE$, $\angle PEA = \angle PCF$.

ΔPCE, ΔPFA – р/б (по пр.) => $\angle PCE = \angle PEC$, $\angle PFA = \angle PA$

(по св. р/б Δ). $\Delta BCE = \Delta ABF$ ($\angle B$ – общий, по I пр.) => $EC = AF$.

$\angle EPC = \angle APF$ => $\angle PFC = \angle PCE = \angle PAE = \angle PFA$; $EC = AF$ => $\Delta PEC =$

$= \Delta APF$ (по II пр.) => $PF = PE = PC = PA$. Тогда $PE = PF$, $BE = BF$

№3 (Продолжение).

Тогда $PE = PF$, $BE = BF$, PB – общая ~~сто~~ $\Rightarrow \triangle PBE = \triangle PBF$ (по III пр.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle PBE = \angle PBF = \angle EBF : 2$. $\angle ABD = \angle CBD$ (по св. р.) $\Rightarrow \angle XBA =$
$= \angle XBF$ (по св. см. $\angle$) $= \angle EBF : 2 \Rightarrow \angle XBE = \angle PBE \Rightarrow P \in BD$, ч. т. д.

№5.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

– числа, получившиеся в итоге.

Пусть Петя до хода Васи не выбрал j. Тогда Вася вместо j ставит 2 и побеждает:

x	x^2 на 10
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

– нет остатка 2.

Значит, Петя до хода Васи выбрал j.

Пусть Петя не выбрал какое-то x-тое с конца число (где это число – ef в самой правой пустой после ходов Пети до хода Васи клетке). Рассмотрим это число в ход Васи: (пусть оно $= k$): если $k \vdots 2$, то $k \cdot 10^{x-1} \underset{2^x}{\equiv} 0$, иначе $k \cdot 10^{x-1} \underset{2^x}{\equiv} 2^{x-1}$. Значит, Вася может менять остатки получившегося в итоге квадрата на 2^{x-1}! Пусть получившийся в итоге квадрат $y^2 \underset{2^x}{\equiv} z$, но Вася может сделать так, чтобы он $y^2 \underset{2^x}{\equiv} z + 2^{x-1}$. Докажем, что квадрат, составляемый Петей и Васей, не может иметь ~~о~~ или ост. z, или ост. $z+2^{x-1}$ (что-то одно):

y	y^2 на 2^x
0	0
1	1
2	4
⋮	⋮
	z
	⋮
	$z+2^{x-1}$
2^x-1	⋮
2^x	0

Пусть при $y \underset{2^x}{\equiv} l$, $y^2 \underset{2^x}{\equiv} z$.

$y \underset{2^x}{\equiv} t$, $y^2 \underset{2^x}{\equiv} z + 2^{x-1}$. ~~Пусть $l = t+n$.~~

~~$(t+n)^2 \underset{2^x}{\equiv} z$, $t^2 \underset{2^x}{\equiv} z+2^{x-1}$~~

~~$t^2+2tn+n^2 \underset{2^x}{\equiv} z$, $t^2 \equiv z+2^{x-1} \Rightarrow 2^{x-1}+2tn+n^2 \underset{2^x}{\equiv} 0 \Rightarrow$~~

$\Rightarrow 2tn + n^2 \underset{2^x}{\equiv} 2^{x-1}$

$n(2t+n) \underset{2^x}{\equiv} 2^{x-1}$

При $y \underset{2^x}{\equiv} \ell$, $y^2 \underset{2^x}{\equiv} z$

$y \underset{2^x}{\equiv} t$, $y^2 \underset{2^x}{\equiv} z + 2^{x-1}$

$\Rightarrow$ есть остаток, при возведении $\uparrow^2$, дающий остаток, $> \frac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{x-1}$ — больший половины рассм. степени 2-ки (числа, по которому сравниваем). Такого быть не может.