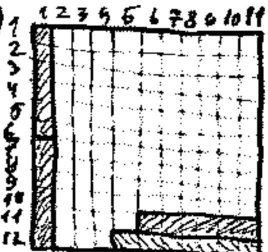
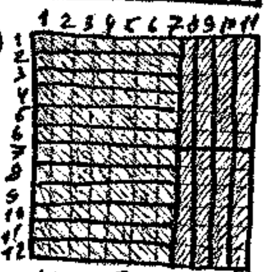
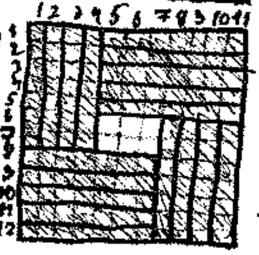
Задача 1

Дан прямоугольник размером 11×12. Пусть клетка 1×1 - единица измерения полоски. Пусть полоски, расположенные вдоль стороны длиной 11 - горизонтальные, а полоски, расположенные вдоль стороны длиной 12 - вертикальные. Даны полоски 1×7 и 1×6. Найти: Кол-во полосок

① 

② 

③ 

④ 

▨ - шестизначные блоки (клетки)
▩ - семизначные блоки (клетки)
□ - не заполнена

I) Рассмотрим ②. ~~Заполним горизонтальную~~ Мы не можем заполнить горизонтальную сторону полностью горизонтальными полосками, так как у нас останется или 11-7=4 клетки, или 11-6=5 клеток, которые мы не сможем заполнить полосками 1×6 или 1×7. Однако мы можем заполнить их вертикальными полосками, причём только если горизонтальной является полоска 1×7. После заполнения горизонтальными полосками 1×7 оставшейся площади полосками 1×6, как на рисунке ③. Тогда количество полосок будет равно $(12\cdot7+6\cdot8=84+48=132$ (проверка)$)$ $12+8=\underline{20}$

II) Можно также заполнить прямоугольник и вертикальными полосками 1×6. Тогда количество полосок будет равно $132:6=\underline{22}$ полоски. Но $22>20$, поэтому 22 полоски - не минимальное из числа полосок.

III) Рассмотрим случаи, когда семизначных полосок понадобится больше (полосок 1×7):

$7\cdot13+6\cdot7=91+42=133$ ∅
$7\cdot14+6\cdot5=98+35=133$ ∅
$7\cdot15+6\cdot4=105+24=129$ ∅
$7\cdot16+6\cdot3=112+18=130$ ∅
$7\cdot17+6\cdot2=119+12=131$ ∅
$7\cdot18+6=132$ (19 полосок)

Однако разместить 18 полосок по 7 мы не можем, т.к. при вертикальном размещении остается незаполненное пространство в $12-7=5$ клеток, а при горизонтальном в $11-7=4$ клетки.

III) При расположении полосок как на рисунке ④ остаётся незаполненное пространство в 1×1 или 2×3 клетки, которое нельзя заполнить полосками в 1×6 или 1×7 длиной.

Ответ: 20

Задача 2.

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{zy}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)$$ $x, y, z \in R$ наим. значение выражения?

Область допустимых значений: $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$ $x, y, z \in R$, кроме 0.

(I) $x, y, z > 0$. Тогда

$$\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xy\cdot zx\cdot yz}{xyz}} = 3\sqrt[3]{xyz};$$

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{xy\cdot zx\cdot yz}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}},$$

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}\right) \geq 3\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 3\cdot 3 = \underline{9.}$$

(2) $x<0;\ y, z>0$. Тогда

$$\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x} = \frac{(-x)y}{z}+\frac{z(-x)}{y}+\frac{yz}{(-x)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(-x)y\cdot z(-x)\cdot yz}{(-x)yz}} = -3\sqrt[3]{xyz}$$

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy} = \frac{(-x)}{yz}+\frac{y}{z(-x)}+\frac{z}{(-x)y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(-x)yz}{(-x)y\cdot yz\cdot(-x)z}} = -3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right) \geq \left(-3\sqrt[3]{xyz}\right)\cdot\left(-3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right) = (-3)\cdot(-3) = \underline{9}$$

(3) $x, y<0;\ z>0$. Тогда $\frac{xy}{z} = \frac{(-x)(-y)}{z} > 0$; $\frac{xz}{y} = \frac{(-x)z}{(-y)} > 0$, $\frac{(-y)z}{-x} > 0$;

Тогда, аналогично пункту (I), $\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right) \geq \underline{9.}$

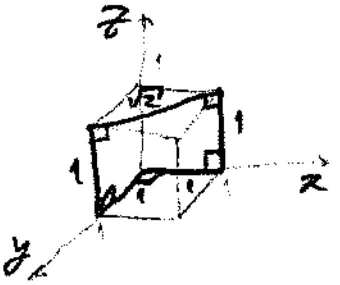
(4) $x, y, z<0$. Тогда $\frac{xy}{z} = \frac{(-x)(-y)}{(-z)} < 0$; $\frac{zx}{y} = \frac{(-z)(-x)}{(-y)} < 0$, $\frac{(-y)(-z)}{(-x)} < 0$

Тогда, аналогично (2), $\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right) \geq \underline{9.}$

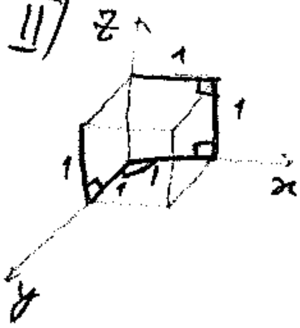
Ответ: 9

Задача 3

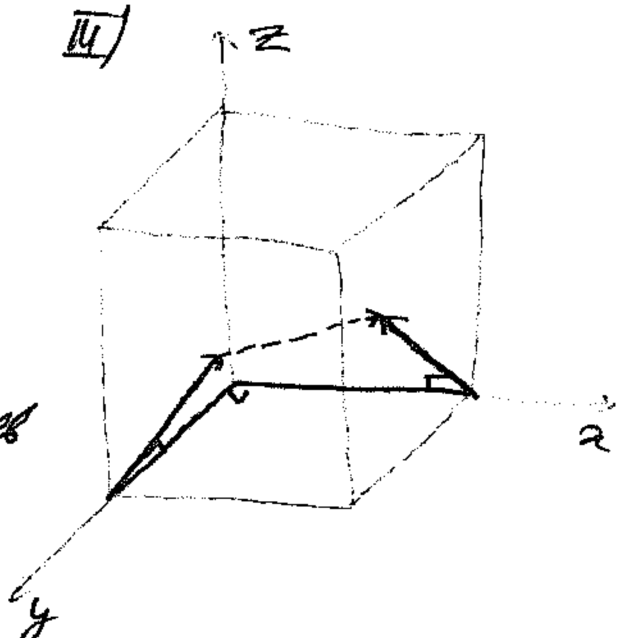
I)



II)



III)



I) не подходит, одно из ~~звень~~ звеньев ломаной равно $\sqrt{2}$ $\varnothing$

II) не подходит, ломаная не замкнута $\varnothing$

III) Введем систему координат: $\overrightarrow{OA}\{0;1;0\}$ $\overrightarrow{OB}\{1;0;0\}$

$AD\{x;1;z_D\}$; $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{x^2+z_d^2+1}$ $x^2+z_d^2+1=1$

$BC\{1;y;z_c\}$; $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{y^2+z_c^2+1}$ $y^2+z_c^2+1=1$ $x^2+z_d^2=y^2+z_c^2$

$DC\{1-x;y-1;z_D-z_c\}$; $|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{(1-x)^2+(y-1)^2+(z_d-z_c)^2}=1$ $(1-x)^2+(y-1)^2+(z_d-z_c)^2=1$

$D(x;1;z_d)$; $C(1;y;z_c)$

$$\begin{cases} x^2+z_d^2=y^2+z_c^2 \\ z_d^2-z_c^2=y^2-x^2 \\ (1-x)^2+(y-1)^2+(z_d-z_c)^2=1 \quad (2) \\ x-x^2+y-1+z_d^2-z_dz_c=0 \quad (1) \\ 1-x+y^2-y+z_dz_c-z_c^2=0 \quad (1) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ $x(1-x)+1(y-1)+z_d(z_d-z_c)=0$

$x-x^2+y-1+z_d^2-z_dz_c=0$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ $1(1-x)+y(y-1)+z_c(z_d-z_c)=0$

$1-x+y^2-y+z_cz_d-z_c^2=0$

(1) $x-x^2+y-1+z_d^2-z_dz_c=1-x+y^2-y+z_dz_c-z_c^2$

$2x-x^2-y^2+2y+2+(z_d^2+2z_dz_c+z_c^2)=0$

(2) $(z_d-z_c)^2=x^2+y^2-2x-2y+2$

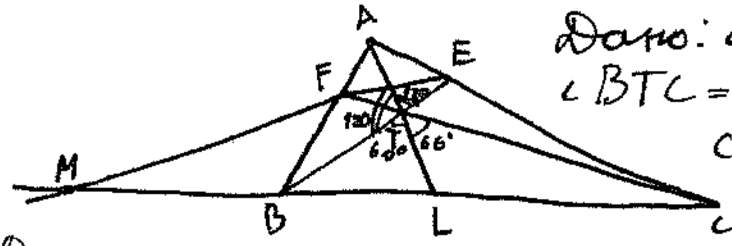
(1)+(2): $1-2x-x^2+y^2-2y+1+x^2+y^2-2x-2y+2=1$

$2y^2-4y+3=0$

$D=16-4\cdot2\cdot3<0$ $y\ \varnothing$

Ответ: не существует.

Задача 4



Дано: $\triangle ABC$; $\angle A < 120°$; $\angle B < 120°$; $\angle C < 120°$; $AB \neq AC$
$\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120°$; $BT \cap AC = E$;
$CT \cap AB = F$.

Док-ть: $EF \cap BC = M$; $\frac{MB}{MC} = \frac{TB}{TC}$

Док-во: ① Применим теорему Менелая для EF:

$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1$; Следовательно, $\frac{MB}{MC} = \frac{EC}{EA} \cdot \frac{A\cancel{E}F}{FB}$

② Применим теорему Чевы для EF:

$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{LC} = 1$; Следовательно, $\frac{BL}{LC} = \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}$

③ Следовательно из ① и ②:

$\frac{MB}{MC} = \frac{EC}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}$; $\frac{BL}{LC} = \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}$; $\frac{MB}{MC} = \frac{BL}{LA}$

④ Рассмотрим $\triangle BTC$:

$\angle BTC = 120°$; $\angle CTA = 120°$; $\angle LTC = 180° - 120° = 60°$ ($\angle LTC$ и $\angle CTA$ – смежные)
$\angle BTA = 120°$; $\angle BTL = 180° - 120° = 60°$ ($\angle BTL$ и $\angle BTA$ – смежные)

$\angle BTL = \angle LTC$, то LT – бис-са $\angle BTC$.

По свойству бис-сы $\frac{TB}{TC} = \frac{BL}{LC}$

Следовательно $\frac{BL}{LC} = \frac{TB}{TC} = \frac{MB}{MC}$

чтд.

Задание 5.

$(a;b;c) \in N$; $a<b<c$;
$\div A_n(a;b;c)$

$ab+1=x^2$, $bc+1=y^2$, $ca+1=z^2$, где x^2, y^2, z^2 – точные квадраты чисел x, y и z.

Пусть $a=1; d=1$ $(1;2;3)$ $1\cdot 2+1=3$; $x=\sqrt{3}$ $\varnothing$

$a=1$; $d=2$ $(1;3;5)$ $1\cdot 3+1=4$; $x=2$; $3\cdot 5+1=16$; $y=4$; $5\cdot 1+1=6$; $z=\sqrt{6}$ $\varnothing$

$a=1$; $d=3$ $(1;4;7)$ $1\cdot 4+1=5$; $x=\sqrt{5}$ $\varnothing$

$a=1$; $d=4$ $(1;5;9)$ $1\cdot 5+1=6$; $x=\sqrt{6}$ $\varnothing$

$a=1$; $d=5$ $(1;6;11)$ $1\cdot 6+1=7$; $x=\sqrt{7}$ $\varnothing$

$a=1$; $d=6$ $(1;7;13)$ $1\cdot 7+1=8$; $x=2\sqrt{3}$ $\varnothing$

$\boxed{a=1, d=7}$ $(1;8;15)$ $1\cdot 8+1=9$; $x=3$; $8\cdot 15+1=121$; $y=11$; $15\cdot 1+1=16$; $\underline{z=4}$

$a=1$; $d=8$ $(1;9;17)$ $1\cdot 9+1$; $x=\sqrt{10}$ $\varnothing$

...

$a=1$; $d=14$ $(1;15;29)$ $1\cdot 15+1=16$; $x=4$; $15\cdot 29+1=436$; $y=\sqrt{436}=2\sqrt{109}$ $\varnothing$

...

$a=2$; $d=1$ $(2;3;4)$ $2\cdot 3+1=7$; $x=\sqrt{7}$ $\varnothing$

$a=2$; $d=2$ $(2;4;6)$ $2\cdot 4=8+1=9$; $x=3$; $4\cdot 6+1=25$; $y=5$; $z=6\cdot 2+1=13$; $z=\sqrt{13}$ $\varnothing$

$\underline{(1;8;15)}$

Ответ: 1.