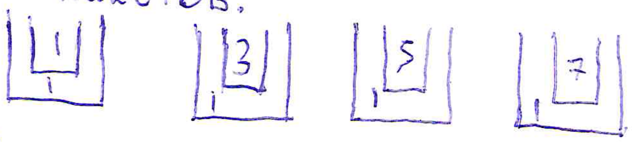
№1

Пример:

8 пакетов.



Оценка:

Пусть пакетов хотя бы 9, тогда рассмотрим пакет с максимальным кол-вом конфет, в нем хотя бы 9 конфет, (т.к. конфет везде различное число)

Выкинем его (может быть вместе с пакетом внутри него) (т.к. пакета внутри пакета внутри пакета не может быть), тогда останется хотя бы 7 пакетов, в максимальном из них хотя бы 7 конфет, т.к. свойство различности пакетов сохранилось, такими операциями находим ~~пакеты в хотя~~ ≥ 5 пакетов, ни один не лежит в другом, и в них суммарно $\geq 1 + \geq 3 + \geq 5 + \geq 7 + \geq 9$, что ≥ 25 конфет. Противоречие.

Ответ: 8.

№2

Оценка:

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)=\frac{(x^2y^2+z^2x^2+y^2z^2)(x^2+y^2+z^2)}{x^2y^2z^2}.$$

Пусть $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$, $a,b,c>0$;

$$\frac{(x^2y^2+z^2x^2+y^2z^2)(x^2+y^2+z^2)}{x^2y^2z^2}=\frac{(ab+ca+bc)(a+b+c)}{abc},$$ но

$$\left.\begin{aligned}ab+ca+bc&\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}\\ a+b+c&\geq 3\sqrt[3]{abc}\end{aligned}\right\},$$ по неравенству между СА и СГ.

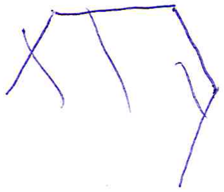
$$\frac{(ab+ca+bc)(a+b+c)}{abc}\geq\frac{9abc}{abc}\geq 9.$$

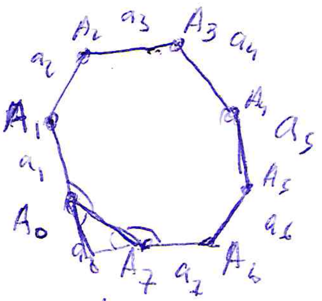
Пример:

$x=y=z=1$, тогда выражение в точности равно 9.

Ответ: 9.

№3





A_i — вершина.
a_i — отрезок между A_{i-1} и A_i
($A_8 = A_0$).

Пусть ~~A_0A_1~~ прямая $A_0A_1 \cap$ прямую $A_2A_3 = B_1$.

$A_2A_3 \cap A_4A_5 = B_2$.

$A_4A_5 \cap A_6A_7 = B_3$.

$A_6A_7 \cap A_0A_1 = B_4$.

Все углы равны и равны $135°$, тогда $\angle A_1B_1A_2 = \angle A_3B_2A_4 = \angle A_5B_3A_6 = \angle A_7B_4A_0 = 90°$, т.к. например в $\triangle A_1B_1A_2$, $\angle B_1A_1A_2 = \angle B_1A_2A_1 = 45°$ (остальные аналогично).

Тогда $B_1A_1 = B_1A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_2$;

$B_2A_3 = B_2A_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_4$;

$B_3A_5 = B_3A_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_6$;

$B_4A_7 = B_4A_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_8$.

Тогда $B_1B_2 = B_3B_4$, $B_2B_3 = B_4B_1$, т.к. $B_1B_2B_3B_4$ — прямоугольник,

но $B_1B_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_2 + a_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}a_4 = B_3B_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_6 + a_7 + \frac{\sqrt{2}}{2}a_8$,

$B_2B_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_4 + a_5 + \frac{\sqrt{2}}{2}a_6 = B_4B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a_8 + a_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}a_2$.

Тогда $\frac{\sqrt{2}}{2}(a_2 + a_4) + a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_6 + a_8) + a_7$, т.е.

$\frac{\sqrt{2}}{2}(a_2 + a_4 - (a_6 + a_8)) = a_7 - a_3$, что возможно лишь при $a_7 = a_3$, т.к. a_i — рациональны, а число в левой части равенства либо 0, либо иррационально (в правой рационально). Тогда $a_3 = a_7$ и $a_5 = a_1$, аналогично (продлением других сторон) доказываем, что $a_2 = a_6$ и $a_4 = a_8$.

Тогда $A_1A_2A_5A_6$, $A_2A_3A_6A_7$, $A_3A_4A_7A_0$, $A_4A_5A_0A_1$ — параллелограммы, т.к. например $A_2A_3 = A_6A_7$ и $A_2A_3 \parallel A_6A_7$, т.к. $B_1B_2 \parallel B_3B_4$ (другие аналогично).

~~Тогда~~ Пусть $M_{A_iA_j}$, $j \neq i$, середина A_iA_j, тогда

$M_2M_6 \underset{A_2A_3A_6A_7}{=} M_3M_7 \underset{A_3A_4A_7A_0}{=} M_4M_0 \underset{A_4A_5A_0A_1}{=} M_5M_1 = X$, тогда X и есть центр симметрии восьмиугольника.