№2.

Заметим, что числа $\frac{xy}{z}, \frac{zx}{y}, \frac{yz}{x}, \frac{x}{yz}, \frac{y}{zx}, \frac{z}{xy}$ лежат по 1 сторону от 0 на числовой прямой. Значит числа $\left(\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{zy}{x}\right)$ и $\left(\frac{z}{xy}+\frac{y}{zx}+\frac{x}{zy}\right)$ тоже лежат по 1 сторону от 0, а значит, рассмотрев случай $x,x,z>0$, будут рассмотрены и все остальные случаи. =>

НУО: $x;y,z\geq 0$

$$\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\geq 3\sqrt[3]{xyz}$$ (Т.к. все числа положительны).

$$\frac{z}{xy}+\frac{y}{zx}+\frac{x}{yz}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

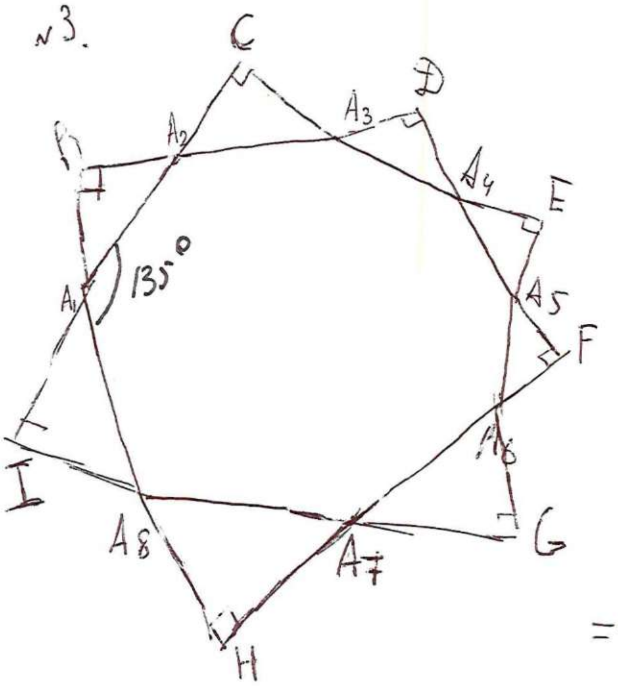
$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\cdot\left(\frac{z}{xy}+\frac{y}{zx}+\frac{x}{yz}\right)\geq 9\sqrt[3]{\frac{xyz}{xyz}}=9.$$

Пример для 9: При $x=y=z=1$:

$(1+1+1)\cdot(1+1+1)=9$ ⊕.

№3.



Сумма углов выпуклого восьмиугольника равна $180^\circ\cdot 6$. Т.к. все углы равны, то каждый угол равен $\frac{180^\circ\cdot 6}{8}=135^\circ$.

Продлим стороны до пересечения, как показано на рисунке (это можно сделать, в силу того, что сумма 2-х соседних углов не равна 180°)

~~Получаем много внешних углов для восьми-угольн~~ $\angle CA_2A_3=\angle CA_3A_2=\angle DA_3A_4=\ldots=\angle BA_2A_1=180^\circ-135^\circ=45^\circ$.

Значит $\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F=\angle G=\angle H=\angle I=90^\circ$.

=> ICEG и HBDF - прямоугольники

=> $BD=HF$, $DF=BH$, $IG=CE$, $IC=EG$., $BD\parallel HF$, $DF\parallel BH$, $IG\parallel CE$, $IC\parallel EG$.

(продолжение на листе №2)

№3 (продолжение).

$$\left.\begin{aligned} BD &= BA_2 + A_2A_3 + A_3D = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_1A_2 + A_3A_4) + A_2A_3. \\ \| \\ HF &= HA_7 + A_6A_7 + A_6F = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_5A_6 + A_7A_8) + A_6A_7. \end{aligned}\right\} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_1A_2 + A_3A_4) + A_2A_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_5A_6 + A_7A_8) + A_6A$$

Т.к. $A_1A_2, A_3A_4, A_2A_3, A_5A_6, A_7A_8, A_6A_7$ – рациональные числа, то $\underset{(1)}{A_1A_2 + A_3A_4 = A_5A_6 + A_7A_8}$ и $A_2A_3 = A_6A_7$.

$$\left.\begin{aligned} DF &= DA_4 + A_4A_5 + A_5F = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_3A_4 + A_5A_6) + A_4A_5 \\ \| \\ BH &= BA_1 + A_1A_8 + A_8H = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_7A_8 + A_1A_2) + A_1A_8 \end{aligned}\right\} A_1A_8 = A_4A_5 \text{ (аналогично (1))}.$$

$$\left.\begin{aligned} IG &= IA_8 + A_7A_8 + A_7G = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_6A_7 + A_8A_1) + A_7A_8 \\ CE &= CA_3 + A_3A_4 + A_4E = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_2A_3 + A_4A_5) + A_3A_4 \end{aligned}\right\} A_3A_4 = A_7A_8 \text{ (аналогично (1))}.$$

$$\left.\begin{aligned} IC &= IA_1 + A_1A_2 + A_2C = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_8A_1 + A_2A_3) + A_1A_2 \\ EG &= EA_5 + A_5A_6 + A_6G = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(A_4A_5 + A_6A_7) + A_5A_6 \end{aligned}\right\} A_1A_2 = A_5A_6. \text{ (аналогично (1))}.$$

$$\left.\begin{aligned} &BD \parallel HF \Rightarrow A_2A_3 \parallel A_6A_7, \quad A_2A_3 = A_6A_7 \\ &DF \parallel BH \Rightarrow A_4A_5 \parallel A_1A_8, \quad A_1A_8 = A_4A_5 \\ &IG \parallel CE \Rightarrow A_8A_7 \parallel A_3A_4, \quad A_3A_4 = A_7A_8 \\ &IC \parallel EG \Rightarrow A_1A_2 \parallel A_5A_6, \quad A_1A_2 = A_5A_6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &A_2A_3A_6A_7, \\ &A_1A_4A_5A_8, \\ &A_3A_4A_7A_8, \\ &A_1A_2A_5A_6 \end{aligned} \text{ – параллелограммы.}$$

$\Rightarrow$ Рассматривая каждый из этих параллелограммов, мы получим, что их диагонали делятся пополам точкой пересечения и пересекаются в 1-ой точке. ($A_1A_5 \cap A_2A_6 \cap A_3A_7 \cap A_4A_8 = $ т. O) и ($A_1O = OA_5$, $A_2O = OA_6$, $A_3O = OA_7$, $A_4O = OA_8$).

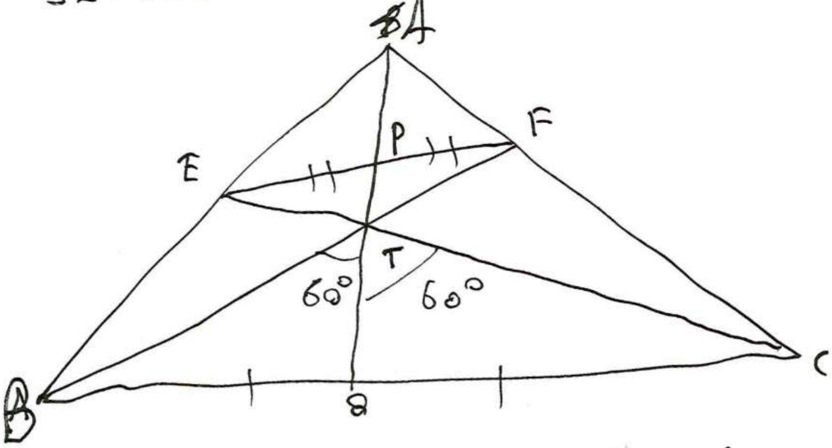
$\Rightarrow$ т. O – центр симметрии восьмиугольника $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6A_7A_8$.

(Симметричны следующие пары точек: (A_1, A_5), (A_2, A_6), (A_3, A_7) (A_4A_8)).

Ч.Т.Д.

№5.

] $EF \parallel BC$:



$EF \parallel BC$

$\Rightarrow BEFC$ – трапеция

$BF \cap CE =$ т. T.

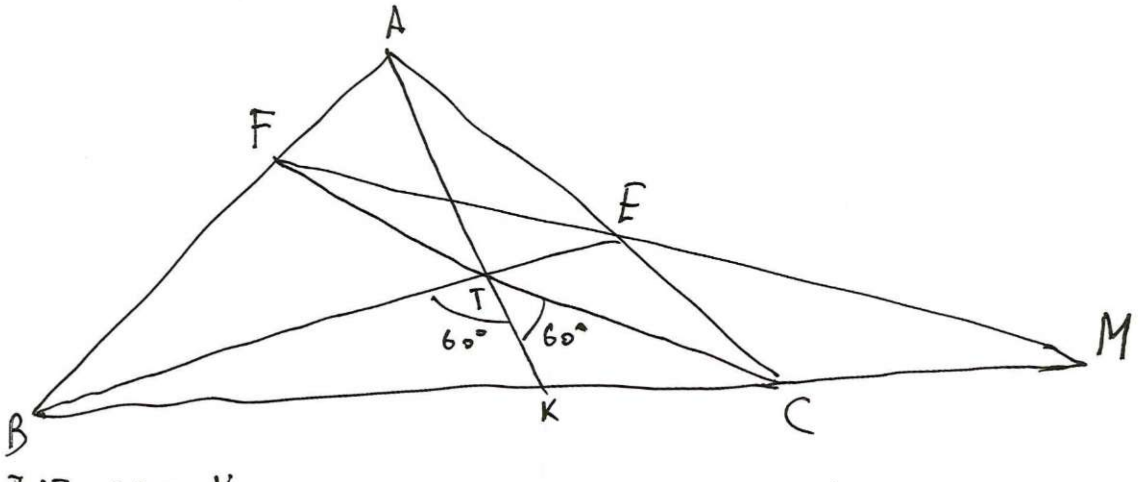
Общеизвестно, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой $\Rightarrow$ т. P – середина EF, т. Q – середина BC.

$\angle ATB + \angle BTQ = 180^\circ$

$\angle ATC + \angle CTQ = 180^\circ$ $\Rightarrow \angle BTQ = \angle QTC = 60^\circ \Rightarrow \Delta BTC$ – равнобедренный (т.к. TQ – бис-са и медиана).

$\Rightarrow BEFC$ – равнобедренная трапеция $\Rightarrow \Delta ABC$ – равнобедренный $\Rightarrow$ противоречие условию, т.к. $AB \neq AC$. $\Rightarrow EF \cap BC$.

] $EF \cap BC =$ т. M.



] $AT \cap BC =$ т. K.

По теореме Чевы для ΔABC.

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CK}{BK} \cdot \frac{BF}{FA} = 1.$$

По теореме Менелая для ΔABC и прямой FM:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1.$$

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CK}{BK} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{BF}{FA} \Rightarrow \frac{CK}{BK} = \frac{MC}{MB}.$$

Как уже доказано, $\angle BTK = \angle KTC = 60^\circ \Rightarrow TK$ – биссектриса $\Rightarrow \frac{BT}{TC} = \frac{BK}{KC}$.

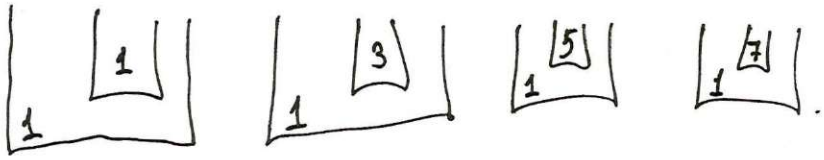
$$\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{TB}{TC}$$

Ч. Т. Д.

№1.

Ответ: 8 пакетов

Пример:



В пакетах лежит по 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 конфет, причём всего конфет $2+4+6+8=20$

(+)

Докажем, что больше 8 пакетов быть не может.

Значит пусть у нас хотя бы 9 пакетов.

Из условия следует, что в каждом „внешнем пакете" не больше 1 пакета,

т.е мы можем в 1 „внешний пакет" положить максимум 1 пакет.

т.е. если у нас 9 пакетов, то внешних хотя бы 5.

(

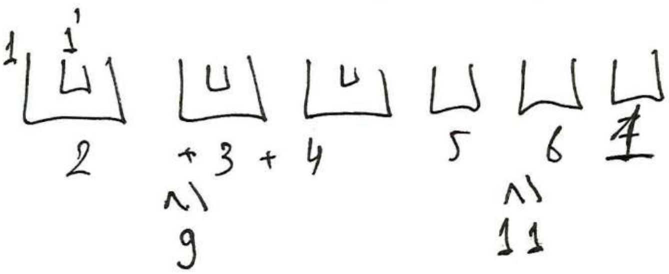
...).

В 1-ых четырёх пакетах хотя бы $2+3+4+5=14$ конфет, значит при 9 пакетах в 5-ом внешнем пакете будет 6 конфет. (если там 1 конфета, то в пак. $1' \to 0$).

Значит в пакете $1'$ – 1 конфета, в пакете 1 - 2 конфеты.

Значит в пакете $2'$ или 1, или 2 конфеты, но пакеты с таким количеством уже есть. (−)

Если мы вытащим из одного внешнего пакета 1 пакет, то внешних пакетов станет на 1 больше,



$(X)=(Y)$
одинаковое кол-во конфет в пак. X и Y.

Но тогда или пакет $1'$ будет пустой, или $(1)=(1')$.

(Продолжение на стр. №5).