N 2

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}\right)=3+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}$$

По неравенству Коши:

1) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\geqslant 2$

2) $\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geqslant 2$

3) $\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\geqslant 2$

Следовательно:

$$3+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\right)\geqslant 9$$

при $x=y=z=1$ то

$$3+(1+1)+(1+1)+(1+1)=9$$

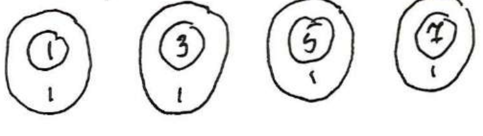
Ответ: 9.

N 1

пусть a - пакет, в котором a конфет

тогда a b - пакет, в котором $a+b$ конфет, внутри которого лежит пакет с a конфетами

Пример на 8 пакетов



Докажем, что не может быть более 8 пакетов

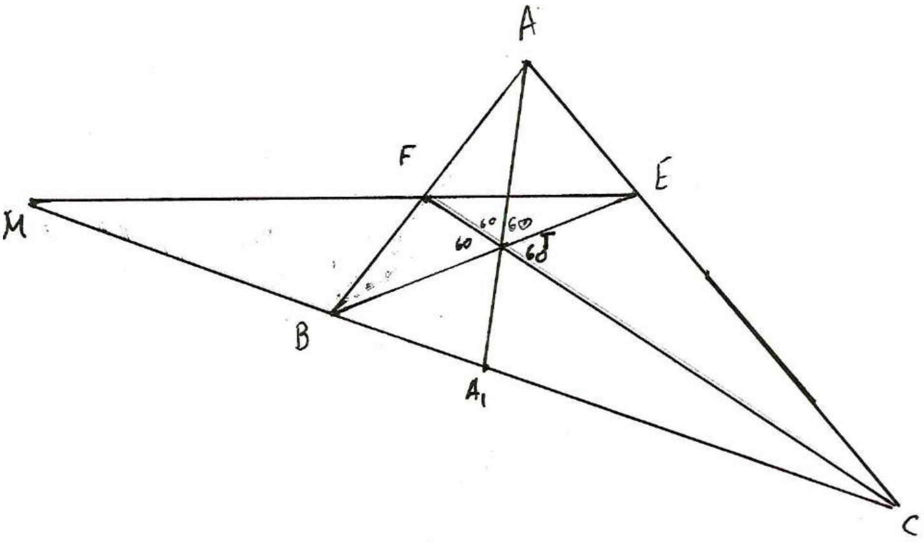
I у нас 9 или более пакетов

• внутренний пакет - пакет, который лежит внутри другого пакета

• внешний пакет - пакет, который не лежит внутри другого пакета

все внутренние пакеты составляют внешние пакеты,
следовательно, сумма внешних пакетов больше суммы внутренних
(суммы конфет внутри)
По условию, сумма всех конфет во внешних пакетах равна 20
следовательно сумма всех конфет во внутренних пакетах < 20
Но так как у нас хотя бы 9 пакетов, то их сумма
не менее чем $\frac{9\cdot 10}{2} = 45$ - противоречие
Ответ: 8

№ 5



Дано: $\triangle ABC$: $AB \neq AC$ и
$\angle A, \angle B, \angle C < 120^\circ$
т. $T \in ABC$: $\angle ATB = \angle CTA =$
$= \angle BTC = 120^\circ$
BT и AC = т. E
CT и AB = т. F
AT и BC = т. A_1
Доказать:
2) EF и BC
1) $\frac{MB}{MC} = \frac{TB}{TC}$

Решение

1) По теореме Менелая в $\triangle ABC$:

$$\frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1 \quad (1)$$

т.к $\angle BTC = 120^\circ$ и $\angle BTC$ и $\angle FTB$ - смежные то $\angle FTB = 60^\circ \Rightarrow \angle FTA = 60^\circ \Rightarrow$ $\angle ATE = 60^\circ \Rightarrow \angle ETC = 60^\circ \Rightarrow$ TF - биссектриса в $\triangle ATB$ и TE - биссектриса в $\triangle ATC$:

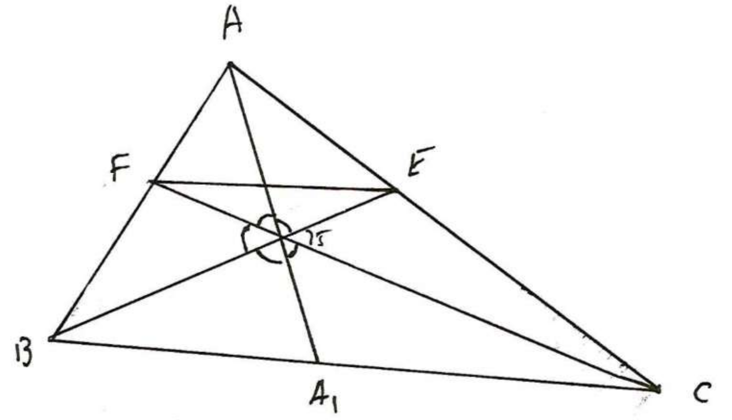
$$\frac{AF}{BF} = \frac{AT}{TB} \text{ и } \frac{AE}{CE} = \frac{AT}{TC} \quad (2)$$

подставим (2) в (1):

$\frac{TC}{AT} \cdot \frac{AT}{TB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1 \Rightarrow$

$\frac{TC}{TB} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{TB}{TC}$ ч.т.д.

2) I $EF \parallel BC$



т.к $\angle BTC$ и $\angle BTF$ – смежные и $\angle BTC = 120^\circ$ то $\angle BTF = \angle ETC = 60^\circ$
т.к $\angle ATB = 120^\circ$ и $\angle FTB = 60^\circ$ то $\angle FTA = \angle A_1TC = 60^\circ \Rightarrow \angle ATE = \angle BTA_1 = 60^\circ$
$\Rightarrow$ TF – биссектриса в $\triangle ATB$, TE – биссектриса в $\triangle ATC$ и TA_1 – биссектриса в $\triangle BTC$

т.к $FE \parallel BC$ то $\angle AFE = \angle ABC$ (как соответственные)
рассмотрим $\triangle AFE$ и $\triangle ABC$
1) $\angle A$ – общий
2) $\angle AFE = \angle ABC$
$\}$ $\triangle AFE \sim \triangle ABC$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC}$

т.к TF – биссектриса в $\triangle ABT$ то $\frac{AF}{FB} = \frac{AT}{TB}$

т.к TE – биссектриса в $\triangle ATC$ то $\frac{AT}{TC} = \frac{AE}{EC}$

т.к TA_1 – биссектриса то $\frac{BT}{CT} = \frac{BA_1}{A_1C}$

т.к $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AT}{TB} = \frac{AT}{CT} \Rightarrow TB = CT \Rightarrow TA_1$ – медиана и высота в $\triangle TBC$
$\Rightarrow TA_1$ – медиана и высота в $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный $\Rightarrow$
$AB = AC$ – противоречие $\Rightarrow BC \cap FE =$ т. M ч.т.д.

№4

квадраты натуральных чисел не могут заканчиваться на 2, 3, 7 и 8

Рассмотрим первые ходы Пети (до хода Васи):

назовём концом числа цифры, которые Петя поставил в конец, подряд.

Следовательно, в конце числа не может быть только нулей, т.к.

1) если нулей - чётно то Вася поставит одно из чисел 2, 3, 7 или 8 и итоговое число не будет квадратом

2) если нулей - нечётно то Вася поставит любую цифру и конечное число также не будет чётно.

а значит Петя поставил в конец какое-то число, а за ним чётное количество нулей.

Пусть число в конце выглядит так $x_1 x_2 x_3 \dots x_n 0 \dots 0$

Следовательно, Петя сможет победить только если Вася, поставив любую цифру даст ему сделать квадрат.

Рассмотрим клетку левее x_1: Вася может поставить туда любую цифру

$\exists$ Петя всегда получит квадрат $\Rightarrow$ разность между полученными квадратами от каждой из цифр Васи будет кратна 10^z где z - n + количество 0 в конце числа - также невозможно $\Rightarrow$ Вася всегда победит

Ответ: Вася всегда победит