Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017–2018 учебный год. Заключительный этап

Решения задач

Задачи для 5 класса

1. Может ли двузначное число делиться на пять других двузначных чисел?

   Решение. Да: например, 84 кратно 12, 14, 21, 28, 42. Другие примеры — 60, 90 и 96.

2. Пруд имеет форму квадрата. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 19%. Через какое время пруд полностью замёрзнет?

   Решение. Нетрудно понять, что подходит пруд 200×200, для которого ответ — через 10 дней (т. к. каждый день сторона уменьшается на 20 метров). Других вариантов нет, поскольку чем больше сторона пруда, тем меньший процент замёрзнет в первый день.

   Более строго: пусть сторона пруда x метров, тогда изначальная площадь x^2 м^2; тогда после первого дня осталось $0,81x^2 = (0,9x)^2$, то есть сторона пруда после первого дня равна $0,9x$. Значит, за первый день сторона уменьшилась на $0{,}1x$. В то же время она уменьшилась на 20 м, откуда $0{,}1x = 20$, $x = 200$.

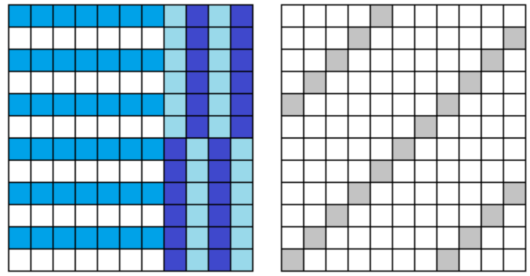
3. Сколько есть способов разрезать квадрат 10×10 по клеткам на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 398? Способы, совмещаемые поворотом или переворотом, считаются различными.

   Решение. 180 способов.

   Если разрезать весь квадрат на 100 единичных квадратиков, то сумма периметров будет равна $4 \times 100 = 400$. Значит, нужно уменьшить эту сумму на 2, что достигается сохранением одной внутренней перегородки нетронутой (иными словами, квадрат разрезается на 98 квадратиков и 1 доминошку). Всего внутренних перегородок 180 — по 9 в каждой из 10 строк и по 9 в каждом из 10 столбцов.

4. Прямоугольник 11×12 разрезан на несколько полосок 1×6 и 1×7. Каково минимальное суммарное количество полосок?

   Решение. Ответ: 20. Пример показан на рисунке.
   Оценка: покрасим каждую седьмую диагональ так, чтобы были закрашены 20 клеток (см. рисунок). Каждая полоска содержит не более одной клетки, поэтому полосок не меньше 20.



5. В нескольких пакетах лежат 20 конфет, причём нет двух пакетов с одинаковым числом конфет и нет пустых пакетов. При этом некоторые пакеты могут лежать в других пакетах (тогда считается, что конфета, лежащая во внутреннем пакете, лежит и во внешнем). Но запрещено делать так, чтобы в каком-то пакете лежал пакет с пакетом внутри. Каково максимально возможное количество пакетов?

   Решение. 8. Пример: ((6)(2)) ((3)(4)) ((1)4) (есть и другие примеры).

   Более 8 пакетов быть не может. Действительно, тогда сумма количеств конфет в пакетах (иначе говоря, число инцидентностей конфет пакетам) не меньше $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Но конфет 20, значит, какая-то из них лежит хотя бы в трёх пакетах, что недопустимо.

Задачи для 6 класса

1. В каждую клетку таблицы 100×100 записали натуральное число. Оказалось, что каждое число либо больше всех своих соседей, либо меньше всех соседей. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех чисел?

   Решение. Разобьём доску на доминошки. В каждой доминошке числа различны, то есть их сумма не меньше $1 + 2 = 3$. Тогда общая сумма чисел на доске не меньше 15 000. Эта оценка достижима, если чередовать единицы и двойки в шахматном порядке.

2. На доске записано натуральное число. Каждую минуту с ним делают следующую операцию: если в нём есть две одинаковых цифры, то стирают любую из них; если же все цифры различны, то стирают всё число и вместо него пишут втрое большее число. Например, из числа 57 можно за две минуты получить $57 \to 171 \to 71$ или $57 \to 171 \to 17$. Мария написала двузначное число и через несколько минут снова получила его же. Приведите пример, как она могла это сделать.

   Решение. $25 \to 75 \to 225 \to 25$ или $75 \to 225 \to 25 \to 75$.

3. Пруд имеет форму квадрата. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 35%. На какой день пруд полностью замёрзнет?

   Решение. Заметим, что чем больше сторона пруда, тем меньший процент замёрзнет в первый день. Если сторона пруда равна 100 м, то в первые сутки день замёрзнет 36%, а если сторона составляет 120 м, то в первые сутки замёрзнет $1 - \frac{100^2}{120^2} = 11/36 < 1/3$ площади пруда. Значит, сторона пруда составляет от 100 до 120 метров. Значит, он замёрзнет на шестой день.

4. См. задания для 5 класса, задача 4.

5. В 100 пакетах лежат 2018 конфет, причём нет двух пакетов с одинаковым числом конфет и нет пустых пакетов. При этом некоторые пакеты могут лежать в других пакетах (тогда считается, что конфета, лежащая во внутреннем пакете, лежит и во внешнем). Докажите, что в каком-то пакете есть пакет с пакетом внутри.

   Решение. Оценим суммарное количество вхождений всех конфет во все пакеты. Каждый из 100 пакетов имеет разное количество вхождений, поэтому их не менее чем $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$. Значит, на какую-то конфету приходится хотя бы три вхождения, то есть она лежит хотя бы в трёх пакетах. Это и значит, что какой-то пакет содержит пакет с пакетом.

Задачи для 7 класса

1. См. задания для 5 класса, задача 3.

2. Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 9 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Ходят по очереди, начинает Петя. Если в конце игры полученное число окажется точным квадратом, то выигрывает Петя, иначе — Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

   Решение. Выигрышная стратегия есть у Васи. Более того, у него есть стратегия, которая обеспечит выигрыш уже после первого хода. Опишем её.

   Пусть Петя первым ходом поставил цифру не в последнюю клетку. Тогда Вася ставит в последнюю клетку одну из тех цифр, на которые не может кончаться квадрат натурального числа, например, цифру 2.

   Пусть Петя первым ходом поставил цифру в последнюю клетку. Тогда Вася ставит цифру в предпоследнюю клетку так, чтобы число давало остаток 2 или 3 от деления на 4. Это всегда можно сделать, например, так: если в разряде единиц стоит 2, 3, 6 или 7, то ставим в разряд десятков 1, иначе 0.
   Как известно, число с остатком 2 или 3 от деления на 4 не может быть точным квадратом (это легко проверить, перебрав остатки от деления на 4).

3. Вера заносит свои знания по планиметрии в таблицы, строки которых соответствуют фигурам, а столбцы — свойствам. Если фигура обладает нужным свойством, то на пересечении строки и столбца пишется 1, а в противном случае — 0. В одной из таблиц 4×4 оказалось, что в каждой строке и каждом столбце ровно по одному нулю. Известно, что первый столбец соответствует свойству «есть острый угол», а второй — свойству «есть равные стороны». Подберите ещё два свойства, а для строк — два треугольника и два четырёхугольника, чтобы получить нужную расстановку нулей и единиц.

   Решение. Например, «есть неравные стороны», «есть прямой угол»; прямоугольник (не квадрат), прямоугольный треугольник (неравнобедренный), равносторонний треугольник, параллелограмм (не ромб и не прямоугольник).

4. См. задания для 6 класса, задача 5.

5. В каждую клетку таблицы 10×10 записали натуральное число. Потом закрасили каждую из клеток, для которой выполняется свойство: число, написанное в этой клетке, меньше одного из своих соседей, но больше другого соседа. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) В результате незакрашенными остались только две клетки. Какова минимально возможная сумма чисел в этих двух клетках?

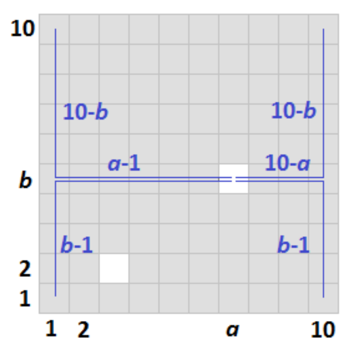
   Решение. Ответ: 20. Это значение достигается, если незакрашенные клетки стоят в противоположных углах и содержат числа 1 и 19.

   Оценка.

   1) Клетки, которые содержат минимальное и максимальное числа, точно не закрашены. Значит, минимум и максимум встречаются по одному разу, и именно они стоят в незакрашенных клетках. Обозначим их значения m и M соответственно.

   2) Если в клетке число n, то длина пути от неё до минимальной клетки не больше $n-1$. Действительно, из клетки можно выходить в соседнюю клетку, в которой число меньше хотя бы на 1, и не позднее через $n-1$ шаг мы обязательно придём в клетку с минимальным числом.
   Аналогичное верно и «с другой стороны»: если число в клетке меньше максимального на k, то от данной клетки до максимальной не более k шагов.

   3) Докажем, что найдётся угловая клетка, сумма расстояний от которой до двух незакрашенных не меньше 18. (Расстоянием между клетками будем называть длину кратчайшего пути между ними.)
   Действительно, пусть (a, b) и (c, d) — координаты незакрашенных клеток. Сумма расстояний от первой незакрашенной клетки до четырёх угловых составляет $(b-1+a-1)+(b-1+10-a)+(10-b+a-1)+(10-b+10-a) = 36$. То же верно для второй незакрашенной клетки, поэтому сумма всех 8 расстояний от угловых клеток до незакрашенных клеток равна 72. Значит, сумма расстояний от незакрашенных до какой-то одной угловой не меньше 18.



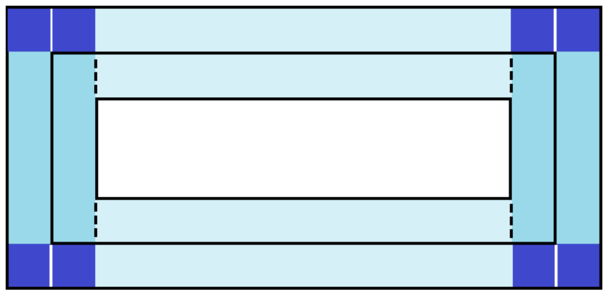
   4) Пусть в угловой клетке, найденной в пункте 3, стоит число x. Тогда $M - m = (M - x) + (x - m)$ не меньше, чем сумма длин путей от угловой клетки до незакрашенных, то есть не меньше 18. Поскольку $m \geqslant 1$, то $M \geqslant 19$, откуда $M + m \geqslant 20$.

Задачи для 8 класса

1. Пруд имеет форму прямоугольника. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не

более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 20,2% , а за вторые — на 18,6% от первоначальной площади. На какой день пруд полностью замёрзнет?

Решение. *Первый способ.* Пусть стороны пруда равны a и b метрам, тогда
$(a-20)(b-20)=(1-0{,}202)ab$, $(a-40)(b-40)=(1-0{,}388)ab$,
откуда $20(a+b)-400=0{,}202ab$, $40(a+b)-1600=0{,}388ab$,
то есть $800=0{,}016ab$, $ab=5000$ и далее $a+b=525$. Получается, что стороны равны 400 и 125 метрам.
Ответ: на седьмой день.



Второй способ. Заметим, что каждый день замерзает на 800 м^2 меньше, чем в предыдущий день. Это видно по рисунку, где показано, что «внешняя рамка» состоит из кусков, равных соответствующим кускам «внутренней рамки», и ещё восьми квадратов 10×10 м. Значит, процентная величина замёрзшей части также уменьшается каждый день одинаково. То есть в первый день замёрзло 20,2% площади, во второй 18,6%, в третий 17,0% и так далее. Заметим, что первые шесть членов этой прогрессии имеют сумму, меньшую 100%, а первые семь членов — уже больше 100%. Значит, пруд замёрзнет на седьмой день.

2. См. задания для 7 класса, задача 3.

3. В ромбе $ABCD$ точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Точка P такова, что $PA=PF$, $PE=PC$. Докажите, что точка P лежит на прямой BD.

   Решение. Заметим, что точка P лежит на пересечении серединных перпендикуляров к AF и EC. Рассмотрим точку Q, симметричную P относительно прямой BD. Она обладает теми же свойствами, что и точка P, то есть $QA=QF$, $QE=QC$. Однако это означает, что и точка Q лежит на пересечении тех же серединных перпендикуляров, то есть совпадает с P. Значит, P лежит на BD.

4. См. задания для 7 класса, задача 5.

5. Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 10 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Однако ходят они не по очереди. Сначала Петя делает столько ходов, сколько захочет (но меньше 10); потом он просит Васю сделать один ход; после этого Петя делает все оставшиеся ходы. Петя выиграет, если результирующее число окажется точным квадратом; в противном случае выигрывает Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

   Решение. Выигрышная стратегия есть у Пети. Например, такая: он пишет в двух последних клетках 04. Заметим, что если число кончается на 02 или 52, то его квадрат кончается на 04. Докажем, для любого Васиного хода Петя сумеет найти точный квадрат.

Пусть Вася сходил в разряд сотен. Рассмотрим квадраты чисел 2, 52, 102, 152, 202, 252, 302, 352, 402, 452. Найдём разность между двумя соседними квадратами:
$(50a+2)^2 = 2500a^2 + 200a + 4$,
$(50a+52)^2 = 2500a^2 + 5200a + 2704$,
откуда $(50a+52)^2 - (50a+2)^2 = 5000a + 2700 \equiv 700 \mod 1000$.
Значит, цифра сотен каждого следующего из этих чисел получается из предыдущей увеличением на 7 по модулю 10. Следовательно, цифры сотен во всех этих числах разные (0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3). Поэтому, если Вася сходит в разряд сотен, Петя сумеет дополнить число до квадрата.

Пусть Вася сходил в разряд тысяч, то есть имеем число $******xy04$, где x задано Васей. Рассмотрим ряд чисел $(100a+2)^2 = 10000a + 400a + 4, a = 0, 2, \ldots 24$. В этих числах xy образуют арифметическую прогрессию с разностью 4 (04, 08, 12, …, 96), поэтому для каждого x найдётся подходящий y.
Если Вася сходил в десятки тысяч, то рассуждения аналогичные: среди квадратов 1|004|004, 4|008|004, 9|012|004, 16|016|004, 25|020|004, …, 576|096|004 найдутся подходящие.

Если Вася сходил в разряд сотен тысяч или больший, то такие рассуждения приводят к рассмотрению слишком больших чисел, но работает другая идея: попытаемся сделать Васину цифру первой ненулевой цифрой в нашем числе.
Заметим, что квадраты соседних чисел в ряду 2, 52, …, 902, 952 различаются менее чем на 100000 (это следует из формулы квадрата суммы), а $952^2 > 900000$, поэтому цифра сотен тысяч пробегает в них все значения от 0 до 9.
В ряду 2, 52, …, 2902, 2952, 3002 квадраты соседних чисел различаются менее чем на миллион, а последний превышает 9 миллионов; значит, цифра миллионов пробегает все значения от 0 до 9.
Три старших разряда рассмотрим одновременно. В ряду 2, 52, …, 99902, 99952 квадраты соседних чисел различаются менее чем на 10 миллионов, а в числе $99952^2 = 9990402304$ во всех трёх старших разрядах стоят девятки. Значит, каждый из трёх старших разрядов пробегает все значения от 0 до 9.

Задачи для 9 класса

1. Какое максимальное количество чисел можно выбрать из множества $\{1, 2, \ldots, 12\}$, чтобы произведение никаких трёх выбранных чисел не равнялось точному кубу?

   Решение. 9: все, кроме 4, 9, 12. Заметим, что для удаления кубов надо убрать хотя бы по одному элементу каждого из множеств $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{1, 3, 9\}$, $\{2, 9, 12\}$, $\{3, 8, 9\}$, $\{4, 6, 9\}$. Заметим, что все числа, кроме 9, входят не более чем в три из этих семи троек. Поэтому если убрать два числа, отличных от 9, то хотя бы одна тройка останется. Если же убрать число 9, то среди оставшихся троек будут две непересекающихся ($\{1, 2, 4\}$, $\{3, 6, 12\}$), поэтому какое бы второе число мы ни убрали, одна из троек останется.

2. См. задания для 8 класса, задача 3.

3. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right),$$

где x, y, z — ненулевые вещественные числа.

Решение. Заметим, что знаки всех шести чисел $\frac{xy}{z}$, $\frac{zx}{y}$ и т.д. одинаковы. Если все они отрицательны, то заменим числа x, y, z на их модули, тогда все слагаемые ($\frac{xy}{z}$ и т. д.) поменяют знак. В результате модуль каждой скобки сохранится, а знак изменится, поэтому произведение двух скобок останется прежним. Следовательно, любое значение, принимаемое выражением, принимается им и при положительных x, y, z.

При положительных значениях x, y, z воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Получим:

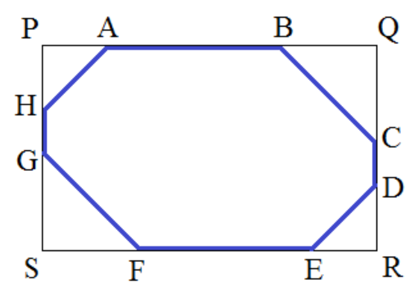
$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right) \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z}\cdot\frac{zx}{y}\cdot\frac{yz}{x}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{x}{yz}\cdot\frac{y}{zx}\cdot\frac{z}{xy}} = 9\sqrt[3]{\frac{(xyz)^2}{xyz}\cdot\frac{xyz}{(xyz)^2}} = 9.$$

Очевидно, значение 9 достигается, например, при $x = y = z = 1$.

4. Все углы выпуклого восьмиугольника равны, а все стороны имеют рациональную длину. Докажите, что у него есть центр симметрии.

Решение. Обозначим восьмиугольник $ABCDEFGH$. Продлим его стороны, взятые через одну, до пересечения (см. чертёж), тогда образованный ими четырёхугольник $PQRS$ — прямоугольник. Действительно, два внешних угла $\triangle HAP$ составляют по 135°, значит, два внутренних — по 45°, поэтому третий — прямой; то же и для углов Q, R, S.

Докажем, что противоположные стороны восьмиугольника (например, AB и EF) равны. Действительно, пусть это не так, тогда их разность равна разности сумм проекций четырёх других сторон на их направление:



$$AB - EF = (PQ - PA - QB) - (RS - RE - SF) =$$
$$= RE + SF - PA - QB = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(DE + FG - HA - BC).$$

Но $AB - EF$ — рациональное и ненулевое число, значит, величина $DE + FG - HA - BC$ иррациональна, что противоречит условию.

Так же доказывается, что $BC = FG$, $DE = HA$. Значит, треугольники HAP и DER равны (равнобедренные прямоугольные треугольники с равными гипотенузами), поэтому при симметрии относительно центра $PQRS$ отрезки DE и HA совместятся. Также совместятся отрезки BC и FG. Значит, восьмиугольник центрально симметричен, что и требовалось доказать.

5. В каждую клетку таблицы 10×10 записали натуральное число. Потом закрасили каждую из клеток, для которой выполняется свойство: число, написанное в этой клетке, меньше одного из своих соседей, но больше другого соседа. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) В результате незакрашенными

остались только две клетки, причём ни одна из них не находится в углу. Какова минимально возможная сумма чисел в этих двух клетках?

Решение. Ответ: 20. Оценка совпадает с оценкой в задаче 7.5. Один из возможных примеров показан ниже.

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
8	10	12	13	14	15	16	17	18	19
7	8	10	12	13	14	15	16	17	18
6	7	8	10	12	13	14	15	16	17
5	6	7	8	10	12	13	14	15	16
4	5	6	7	8	10	12	13	14	15
3	4	5	6	7	8	10	12	13	14
2	3	4	5	6	7	8	10	12	13
1	2	3	4	5	6	7	8	10	12
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Задачи для 10 класса

1. См. задания для 5 класса, задача 5.

2. См. задания для 9 класса, задача 3.

3. См. задания для 9 класса, задача 4.

4. См. задания для 8 класса, задача 5.

5. Пусть все углы треугольника ABC меньше 120° и $AB \neq AC$. Рассмотрим точку T внутри треугольника, для которой $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120^\circ$. Пусть прямая BT пересекает сторону AC в точке E, а прямая CT пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC пересекаются в некоторой точке M, причём $MB : MC = TB : TC$.

   Решение. 1) Допустим, что $EF \parallel BC$. Тогда по теореме Фалеса $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}$. Пусть D — точка пересечения прямых AT и BC, тогда $\angle BTD = 180^\circ - 120^\circ = \angle CTD$, то есть TD — биссектриса в $\triangle TBC$. Аналогично TE — биссектриса в $\triangle TCA$, TF — биссектриса в $\triangle TAB$. Как известно, биссектриса делит сторону треугольника пропорционально двум другим сторонам, откуда $\frac{AF}{FB} = \frac{TA}{TB}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{TA}{TC}$. Значит, $TB = TC$, и $\triangle TBC$ — равнобедренный (с основанием BC). Поэтому его биссектриса TD является также медианой и высотой. Значит, AD — медиана и высота $\triangle ABC$. т. е. $AB = AC$ — противоречие.

   2) По теореме Менелая для треугольника ABC и секущей EM, $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$.

   По теореме Чевы, $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$. Значит, $\frac{MB}{MC} = \frac{DB}{DC}$.

   По свойству биссектрисы, $\frac{DB}{DC} = \frac{TB}{TC}$, откуда $\frac{MB}{MC} = \frac{TB}{TC}$.

Задачи для 11 класса

1. См. задания для 5 класса, задача 4.

2. См. задания для 9 класса, задача 3.

3. Существует ли пятизвенная неплоская замкнутая ломаная, все звенья которой равны, а каждые два соседних звена перпендикулярны?

   Решение. Обозначим ломаную $ABCDE$. Не умаляя общности, можно считать, что длина каждого звена равна 1. Тогда можно ввести систему координат, в которой три вершины имеют координаты $A(0,1,0), B(0,0,0), C(1,0,0)$. Тогда координаты двух других вершин — $D(1,a,b)$ и $E(c,1,d)$.

   Запишем 5 раз теорему Пифагора: три условия вида «длина звена равна 1» и ещё два условия вида «длина отрезка между несоседними вершинами равна $\sqrt{2}$», которые следуют из перпендикулярности соседних звеньев. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} CD = 1 \\ DE = 1 \\ EA = 1 \\ CE = \sqrt{2} \\ DA = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (1-c)^2 + (1-a)^2 + (b-d)^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ (1-c)^2 + 1^2 + d^2 = 2 \\ 1^2 + (a-1)^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = (c-1)^2 + d^2 = 1 \\ (a-1)^2 + (c-1)^2 + (b-d)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c = 1/2 \\ |b| = |d| = \sqrt{3}/2 \\ (b-d)^2 = 1/2. \end{cases}$$

   Очевидно, эта система не имеет решений. Значит, такой ломаной не существует.

4. См. задания для 10 класса, задача 5.

5. Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c), образующих арифметическую прогрессию ($a < b < c$), для которых числа $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ являются точными квадратами?

   Решение. Бесконечно много.
   Пусть $(2+\sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ ($A_n, B_n \in \mathbb{N}$). Тогда $(2-\sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$ и $A_n^2 - 3B_n^2 = 1$. Положим $a = 2B_n - A_n$, $b = 2B_n$, $c = 2B_n + A_n$. Тогда a, b, c образуют арифметическую прогрессию, $ab + 1 = (A_n - B_n)^2$, $bc + 1 = (A_n + B_n)^2$, $ca + 1 = B_n^2$.