Решения задач для учащихся 9-10 классов.

1. **Ответ:** 10000,11000,10100,10010,10001.

Решение: Обозначим через n наше число, через a его сумму цифр, через b сумму цифр числа na. Тогда $nab < 10n$, так что $ab \leq 9$. Если $a = 1$, то $n = 10000$, этот пример подходит. Если $a = 2$, то $b = 4$, из соответствующих чисел (20000,11000, 10100, 10010, 10001) подходят все, кроме 20000. Если $a = 3$, то n кратно 3, так что $an = 3n$ делится на 9, а тогда и b делится на 9, в этом случае $ab \geq 3 \cdot 9 > 10$ — противоречие. Если $a = 4$, то n дает остаток 4 при делении на 9, $an = 4n$ дает остаток 7 при делении на 9. Тогда и b дает остаток 7 при делении на 9, и снова $ab > 10$. Наконец, если $a \geq 5$, то $b < 10/a < 2$, так что $b = 1$, но na лежит строго между 10000 и 100000 и не может иметь сумму цифр 1.

2. **Решение:** Клеток одного из цветов (скажем, красного) будет не менее $49/3$, то есть хотя бы 17. Тогда найдется строка не менее чем с $17/7$ красными клетками (иначе говоря, хотя бы с тремя красными клетками) и столбец хотя бы с тремя красными клетками, что и требовалось доказать.

3. **Ответ:** $1024 = 2^{10}$.

Решение: Рассмотрим ряд из 10 букв A. После каждой из них можно поставить либо одну букву B, либо ни одной. Оставшиеся буквы B должны стоять перед всеми буквами A. Таким образом, чтобы выписать все возможные слова, соответствующие условию задачи, мы должны 10 раз сделать выбор (поставить одну букву B или ни одной). Это даст 2^{10} различных слов.

4. **Решение:** Пусть K — проекция A_1 на BB_1. Треугольники BA_1K и BCB_1 — равнобедренные прямоугольные, поэтому $A_1K = A_1B/\sqrt{2}$, $B_1K = BB_1 - BK = (BC - BA_1)/\sqrt{2} = CA_1/\sqrt{2}$. Осталось применить теорему Пифагора к треугольнику A_1B_1K.

5. **Решение:** Обозначим количество двоек, пятерок и девяток через a, b, c соответственно. Тогда $A + B = c, B + C = a, A + C = b$, где A, B, C — количество пар (5,9), (2,9), (5,2) соответственно при первом разбиении на пары. Отсюда $A = (b + c - a)/2$ и так далее. То же верно и для второго разбиения на пары, поэтому с точностью до порядка в этих разбиениях будут просто одни и те же пары чисел.

6. **Решение:** Предположим противное. Тогда найдутся простое p и неотрицательное m такие, что k делится на p^{2m+1}, но не на p^{2m+2}. Так как n^2 делится на k, получаем, что n должно делиться на p^{m+1}. Теперь видим, что левая часть не делится на p^{2m+2} (два слагаемых делятся, а третье нет), а правая делится. Противоречие.