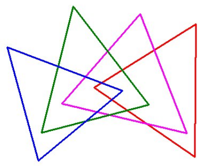
Решения задач для учащихся 7-8 классов.

1. Можно ли нарисовать четыре треугольника так, что внутри каждого из них содержится ровно по одной вершине каждого из остальных треугольников? Вершины не могут лежать на сторонах других треугольников.



Решение: Да можно, например так:

2. Петя бегает по круговой дорожке. Каждые 5 минут он пробегает мимо Маши, качающейся на качелях, а каждые 15 минут обгоняет пенсионера Михаила Ивановича, который тоже бегает по кругу. В некоторый момент Петя развернулся и побежал с той же скоростью в противоположном направлении. Как часто он теперь встречается с Михаилом Ивановичем?

Ответ: Он будет встречаться раз в три минуты.

Решение: Обозначим длину дорожки через S, скорость Пети и Михаила Ивановича соответственно через $v_{\text{П}}$ и $v_{\text{МИ}}$. Тогда условие можно записать как $\frac{S}{v_{\text{П}}} = 5$ и $\frac{S}{v_{\text{П}} - v_{\text{МИ}}} = 15$. Если Петя развернется, то его скорость сближения с пенсионером станет $v_{\text{П}} + v_{\text{МИ}}$, а время соответственно $\frac{S}{v_{\text{П}} + v_{\text{МИ}}}$, что нам и остается найти:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{v_{\text{П}}} = 5 \\ \dfrac{S}{v_{\text{П}} - v_{\text{МИ}}} = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} v_{\text{П}} = \dfrac{S}{5} \\ v_{\text{П}} - v_{\text{МИ}} = \dfrac{S}{15} \end{cases} \iff \begin{cases} v_{\text{МИ}} = \dfrac{2S}{15} \\ v_{\text{П}} + v_{\text{МИ}} = \dfrac{S}{3} \end{cases} \implies \frac{S}{v_{\text{П}} + v_{\text{МИ}}} = 3$$

3. Дети загадали натуральное число и произнесли следующие девять фраз: «Число делится на 2», «Число делится на 3, но не делится на 2», «Число делится на 4, но не делится на 3», ..., «Число делится на 10, но не делится на 9». Какое наибольшее количество фраз могут быть верными одновременно?

Ответ: 4 фразы.

Решение: Очевидно, что две подряд идущие фразы не могут быть верными одновременно. Таким образом, ответ — не больше 5. При этом, если ответ — ровно 5, то верные фразы — 1, 3, 5, 7 и 9. Но третья фраза «Число делится на 4, но не делится на 3» и пятая «Число делится на 6, но не делится на 5» противоречат друг другу (противоречие в делимости на 3). Таким образом, более 4 фраз верными быть не могут. В качестве примера для 4 фраз можно взять число 40.

4. Можно ли разбить числа от 1 до 2012 на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре содержала в десятичной записи только нули и четвёрки?

Ответ: Нет, нельзя.

Решение: Ближайшим к 1987 числом, состоящим из 4 и 0, является 4000. Таким образом парное к 1987 должно быть не меньше $4000 - 1987 = 2013$,а это противоречит условию.

Другое решение: Заметим, что все числа, составленные из нулей и четвёрок, делятся на четыре. Если числа удалось разбить на пары, то сумма чисел в каждой паре делится на 4, а значит, и сумма чисел от 1 до 2012 должна делиться на 4. Однако можно убедиться, что это не так: эта сумма равна

$$(1+2012)+(2+2011)+(3+2010)+\ldots+(1005+1008)+(1006+1007) = 1006\cdot 2013$$

и на 4 не делится.

5. В некоторых клетках доски 8×8 стоит по фишке, причём в каждой строке и в каждом столбце фишек не менее четырёх. Всегда ли можно снять часть фишек так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце осталось ровно по 4 фишки?

×	×	×					×
×	×	×					×
×	×	×					×
			×		×	×	×
				×	×	×	×
			×	×	×	×	
			×	×	×	×	
×	×	×	×	×			

Ответ: Нет, не всегда.

Решение: Рассмотрим расстановку фишек, приведенную на рисунке. Фишку можно снять, если её столбец и её строка содержат больше 4 фишек. Но в приведенном примере такими строками или столбцами являются только последние, на пересечении которых фишки нет. Таким образом, с доски нельзя снять ни одной фишки; следовательно, нельзя оставить по 4 фишки в каждой строке и столбце.

Комментарий: В случае, если на доске и так стоят по четыре фишки в каждой строке и каждом столбце, можно снять часть фишек (а именно ноль фишек) указанным образом. Поэтому решения, в которых в качестве примера приведена подобная расстановка, не являются решениями.

6. В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если к весу любого слона, кроме последнего, прибавить удвоенный вес стоящего за ним, то получится 15 тонн. Найдите вес каждого из слонов (и докажите, что он не может быть другим).

Ответ: Каждый слон весит 5 тонн.

Решение: Пусть последний слон весит 5 тонн + x кг, по условию x — целое число. Тогда предпоследний слон весит 5 тонн − $2x$ кг, стоящий перед ним 5 тонн + $4x$ кг и т. д. Продолжая рассуждения, получим что первый слон весит 5 тонн + $2^{14}x$ кг = 5 тонн + $16384x$ кг. Если $x > 0$, это означает, что вес первого слона больше 15 тонн, что невозможно, а если $x < 0$, это означает, что вес слона отрицательный. Следовательно, $x = 0$ и все слоны весят по 5 тонн.

Комментарий: Не следует путать килограммы с тоннами!