Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/2014 учебный год. Второй тур
Задачи для 5 класса

Напомним, что в каждой задаче нужно не только записать ответ, но и объяснить, почему ответ в задаче именно такой. В частности, если в задаче требуется найти некоторую величину, то нужно найти все возможные её значения и доказать, что других значений она принимать не может.

1. Разрежьте шахматную доску по клеточкам на две фигуры так, что в первой фигуре на 4 клетки больше, чем во второй, но во второй фигуре на 4 чёрных клетки больше, чем в первой. Обе фигуры должны быть связными, то есть не должны распадаться на части.
2. Известно, что в понедельник маляр красил вдвое медленнее, чем во вторник, среду и четверг, а в пятницу — вдвое быстрее, чем в эти три дня, но работал 6 часов вместо 8. В пятницу он покрасил на 300 метров забора больше, чем в понедельник. Сколько метров забора маляр покрасил с понедельника по пятницу?
3. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых все цифры различны, первая цифра делится на 2, а сумма первой и последней цифр — делится на 3.
4. В семье Олимпионовых принято особо отмечать день, когда человеку исполняется столько лет, какова сумма цифр его года рождения. У Коли Олимпионова такой праздник настал в 2013 году, а у Толи Олимпионова — в 2014. Кто из них старше и на сколько лет?
5. Карлсон купил в буфете несколько блинов (по 25 рублей за штуку) и несколько банок мёда (по 340 рублей за штуку). Когда он сообщил Малышу, какую сумму потратил в буфете, тот сумел только на основании этой информации определить, сколько банок мёда и сколько блинов купил Карлсон. Могла ли эта сумма превысить 2000 рублей?
6. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталось больше всего золота — 30 кг — и пятая часть всего серебра. Сколько золота было в кладе?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/2014 учебный год. Второй тур
Задачи для 6 класса

Напомним, что в каждой задаче нужно не только записать ответ, но и объяснить, почему ответ в задаче именно такой. В частности, если в задаче требуется найти некоторую величину, то нужно найти все возможные её значения и доказать, что других значений она принимать не может.

1. Разрежьте шахматную доску по клеточкам на две фигуры так, что в первой фигуре на 6 клеток больше, чем во второй, но во второй фигуре на 6 чёрных клеток больше, чем в первой. Обе фигуры должны быть связными, то есть не должны распадаться на части.
2. В семье Олимпионовых принято особо отмечать день, когда человеку исполняется столько лет, какова сумма цифр его года рождения. У Коли Олимпионова такой праздник настал в 2013 году, а у Толи Олимпионова — в 2014. Кто из них старше и на сколько лет?
3. Найдите количество таких пятизначных чисел, у которых все цифры различны, первая цифра делится на 2, а сумма первой и последней цифр — делится на 3.
4. В начале года американский доллар стоил 80 европейских центов. Эксперт дал прогноз, что в течение года курс евро по отношению к рублю вырастет на 8% (то есть за 1 евро можно будет купить на 8% рублей больше, чем в начале года), а курс доллара по отношению к рублю упадёт на 10%. Если прогноз сбудется, то сколько американских центов будет стоить евро в конце года?
5. Карлсон купил в буфете несколько блинов (по 25 рублей за штуку) и несколько банок мёда (по 340 рублей за штуку). Когда он сообщил Малышу, какую сумму потратил в буфете, тот сумел только на основании этой информации определить, сколько банок мёда и сколько блинов купил Карлсон. Могла ли эта сумма превысить 2000 рублей?
6. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталось больше всего золота — 30 кг — и пятая часть всего серебра. Сколько золота было в кладе?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/2014 учебный год. Второй тур
Задачи для 7 класса

Напомним, что в каждой задаче нужно не только записать ответ, но и объяснить, почему ответ в задаче именно такой. В частности, если в задаче требуется найти некоторую величину, то нужно найти все возможные её значения и доказать, что других значений она принимать не может.

1. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя выписала 9 чисел, а максимальное число, написанное на доске дважды, равно 50. Сколько всего различных чисел выписано на доске?
2. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с периметром 36, стороны которого проходят по линиям сетки. Какую наибольшую площадь он может иметь?
3. В окружности проведены три равных хорды, проходящие через одну точку. Докажите, что эти хорды являются диаметрами.
4. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталось больше всего золота — 25 кг — и восьмая часть всего серебра. Сколько золота было в кладе?
5. Три человека хотят приехать из города A в город B, расположенный в 45 километрах от A. У них есть два велосипеда. Скорость велосипедиста 15 км/ч, пешехода — 5 км/ч. За какое минимальное время они смогут добраться до B, если велосипед нельзя оставлять на дороге без присмотра?
6. Лев взял два натуральных числа, прибавил их сумму к их произведению и в результате получил 1000. Какие числа мог взять Лев? Найдите все варианты.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/2014 учебный год. Второй тур
Задачи для 8 класса

1. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя — 9, а число 6 оказалось написано дважды. Сколько всего различных чисел на доске?

2. В окружности проведены три равных хорды, проходящие через одну точку. Докажите, что эти хорды являются диаметрами.

3. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталась 1/5 всего золота и 1/7 всего серебра, а младшему — 1/7 всего золота. Какая доля серебра досталась младшему брату?

4. Три человека хотят приехать из города A в город B, расположенный в 45 километрах от A. У них есть два велосипеда. Скорость велосипедиста 15 км/ч, пешехода — 5 км/ч. За какое минимальное время они смогут добраться до B, если велосипед можно оставлять на дороге без присмотра?

5. Карлсон купил в буфете несколько блинов (по 25 рублей за штуку) и несколько банок мёда (по 340 рублей за штуку). Когда он сообщил Малышу, какую сумму потратил в буфете, тот сумел только на основании этой информации определить, сколько банок мёда и сколько блинов он купил. Могла ли эта сумма превысить 2000 рублей?

6. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с периметром 2014, стороны которого проходят по линиям сетки. Какую наибольшую площадь он может иметь?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/2014 учебный год. Второй тур
Задачи для 9 класса

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?
2. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя — 9, а число 6 оказалось написано дважды. Сколько всего различных чисел на доске?
3. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталась 1/5 всего золота и 1/7 всего серебра, а младшему — 1/7 всего золота. А какая доля общего серебра досталась младшему?
4. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать три части, из которых можно составить прямоугольник $1\times2{,}4$. Части можно поворачивать и переворачивать.
5. Пусть a и n — натуральные числа, причём известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное k такое, что a не может быть k-значным числом.
6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел x и y значение выражения $x\#y=(x+y)/(1-xy)$, если оно определено. Однажды он «сложил» своим способом числа a и b и «прибавил» к ним c, а друга попросил «сложить» числа b и c и «прибавить» к ним a. Могли ли у них получиться разные результаты?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/2014 учебный год. Второй тур
Задачи для 10 класса

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?
2. Пусть $f(x) = x^3+9x^2+27x+24$. Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 0$.
3. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать четыре части, из которых можно составить прямоугольник 1×2,5. Части можно поворачивать и переворачивать.
4. Внутри квадрата со стороной 100 нарисовали 100 000 квадратов. Диагонали разных квадратов не имеют общих точек. Докажите, что сторона хотя бы одного квадрата меньше 1.
5. Пусть a и n — натуральные числа, причём известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное k такое, что a не может быть k-значным числом.
6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел x и y значение выражения $x\#y=(x+y)/(1–xy)$, если оно определено. Однажды он «сложил» своим способом числа a и b, «прибавил» к ним c, а к результату — d. В то же время его друг «сложил» числа c и d, «прибавил» к ним b, а к результату — a. Могли ли у них получиться разные результаты?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/2014 учебный год. Второй тур
Задачи для 11 класса

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?
2. Пусть $f(x) = x^3+9x^2+27x+24$. Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 0$.
3. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать пять частей, из которых можно составить прямоугольник 1×2,7. Части можно поворачивать и переворачивать.
4. Существует ли треугольная пирамида, у которой высота равна 60, высота каждой боковой грани, проведённая к стороне основания, равна 61, а периметр основания равен 62?
5. Пусть a и n — натуральные числа, причём известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное k такое, что a не может быть k-значным числом.
6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел a и b значение выражения $a\#b=(a+b)/(1-ab)$, если оно определено. Как и в обычной арифметике, умножение на натуральное число Павел понимает как сложение соответствующего числа одинаковых слагаемых: $a@b=((a\#a)\#a)...\#a$ (здесь b «слагаемых»). Существуют ли в арифметике Павла такие неравные натуральные числа x и y, для которых равны «произведения» $x@y$ и $y@x$?